



DE MORGAN'S

ELEMENTS OF ARITHMETIC.

878

Translated into the Marathi Language,

BY

COLONEL GEORGE RITSO JERVIS,

CHIEF ENGINEER BOMBAY.

ASSISTED BY

VISHNOO SOONDER CHUTLEY,

GUNGADHUR SHASTRI PHUDKAY,

GOVIND GUNGADHUR PHUDKAY.

878

BOMBAY:

AMERICAN MISSION PRESS,

T. GRAHAM, PRINTER.

1850



~~244~~  
~~C 102~~  
~~6144~~

अंकगणिताचा मूळ पीठिका; ८७९

कारनेल जार्जरिट्सो जर्विस साहेब,

यांणीं

विष्णु सुंदर छत्त्रे, गंगाधर शास्त्री फडके

आणि

गोविंद गंगाधर फडके

यांचा सहाय्याने केलें



मुकाम मुंबई. माहे फेब्रुवारी सन् १८५०.

प्रबर्धमध्ये अमेरिकन मिशन छापखान्यांत छापिलें, सन् १८५०.





B1

30

## अनुक्रमणिका.



### पहिलें पुस्तक.

भाग.	पृष्ठ.
पहिला. अंकसंख्यालेखनवाचन . . . . .	१
दुसरा. मिळवणी आणि वजावाकी . . . . .	१७
तिसरा. गुणाकार . . . . .	२९
चवथा. भागाकार . . . . .	४१
पांचवा. अपूर्णांक . . . . .	६४
सहावा. दशांश अपूर्णांक . . . . .	७९
सातवा. वर्गमूल . . . . .	१०८
आठवा. प्रमाण . . . . .	१२२
नववा. संयोग आणि व्युत्क्रम संयोग . . . . .	१४३

### दुसरें पुस्तक.

पहिला. वजन मापें इत्यादि . . . . .	१५०
दुसरा. त्रैराशिक . . . . .	१८६
तिसरा. व्याज इत्यादि . . . . .	१९४

### पुरवणी.

पहिला. गणन करण्याची रीति . . . . .	२०७
दुसरा. नऊ आणि अकरा टाकून ताळा पहाण्याची रीति . . . . .	२१३
तिसरा. अंकसंख्या लेखनवाचन क्रम रीति . . . . .	२१६

भाग.	पृष्ठ.
चवथा. अपूर्णाकांचें व्याख्यान. . . . .	२२०
पांचवा. गुणदर्शकांची रीति. . . . .	२२४
सहावा. पैक्याचे दशांशरूप हिशोबाची रीति. . . . .	२२६
सातवा. वहिवाटवहिचा रितीचीं मूळ कारणें. . . . .	२२९
आठवा. अपूर्णाकांचे किमतीचे जवळ जवळ दुसरे अपूर्णाक काढण्याची रीति : . . . . .	२४०
नववा. अंकांचे साधारण गुणांविषयी. . . . .	२४४
दहावा. संयोगांविषयी. . . . .	२५६
अकरावा. सर्माकरणें उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति. . . . .	२६७
बारावा. भूमितीला अंकगणित लावण्याचा रिती. . . . .	२७७

878

TO

THE HONORABLE SIR GEORGE RUSSELL CLERK, K. C. B.

GOVERNOR OF BOMBAY.

One of the most eminent of those Statesmen who have laboured in many ways, and with conspicuous success, for the mental and moral improvement of the Natives of Hindoostan; and who considers that the introduction into India of European knowledge and modern science, by translation from the languages of Europe into the languages of the East, is the true basis on which the Education of the mass of the Native population should be founded; this translation into Marathi of Professor De Morgan's pre-eminently lucid treatise on the Elements of Arithmetic is, with sentiments of unfeigned admiration and regard, dedicated, by his most obedient humble servant,

GEORGE RITSO JERVIS.

*Bombay, August 1850.*

“ Ce n'est point par la routine qu'on s'instruit, c'est par sa propre réflexion ; et il est essentiel de contracter l'habitude de se rendre raison de ce qu'on fait : cette habitude s'acquiert plus facilement qu'on ne pense ; et une fois acquise, elle ne se perd plus.”—CONDILLAC.

ज्ञानप्राप्ती स्वकष्टानें आणि स्वविचारानें होती. दुसऱ्याचे सांगण्यावरून केवळ पाठ करणें, हा ज्ञानप्राप्तीचा उपाय नव्हे. जें कांहीं करायाचें, त्याचें कारण सांगण्याची अवश्य संवय केली पाहिजे. अशी संवय करण्यास, जरी पहिल्यानें अवघड वाटतें, तथापि ती अभ्यासानें सोपी होती. आणि एकदां संवय झाली, ह्मणजे, ती कधीं सुटत नाही.

## मूळ पीठिका.

### पहिलें पुस्तक.

### अंकगणिताचा मूळ पीठिका.

### पहिला भाग.

### अंकसंख्या लेखन वाचन यांविषयीं.

१. कांहींएक जातीचे वस्तूंचा समुदाय एकत्र झालेला आहे अशी कल्पना कर; झणजे जसी, एक स्वारांची टोळी. ती पाहिल्यानंतर पाहणारास जरी मोजायाची संवय नसली, तरी त्या टोळींत प्रत्येक मनुष्यास एक एक घोडा आहे असे त्यास पाहिल्याने वाटेल. आतां मनुष्ये आणि घोडे हे दोन्ही जरी भिन्न भिन्न जातीचे आहेत, तरी पाहिल्ये जातीचे एकास दुसऱ्ये जातीचा एक आहे, झणजे, प्रत्येक घोड्यावर एक एक मनुष्य आहे, यास्तव पाहणाराचा मनांत एक नवी कल्पना उत्पन्न होईल, ती शब्दांनीं याप्रमाणें बोलतां येईल, झणजे, मनुष्यांची आणि घोड्यांची संख्या सारखीच आहे. जेव्हां रानटी मनुष्यास मोजण्याची कांहींएक रीति माहित नव्हती, तेव्हां प्रत्येक मनुष्याबद्दल एक एक खडा घेऊन, वरची अंकसंख्या स्मरणांत ठेवीत असेल. अशा तऱ्हेचा रानटी रीतीपासून, उत्पन्न झालेले पुढील कलमांत जे कम सांगितले आहेत, त्यांचा योगाने आपला गणना करण्याचा प्रकार झाला असावा असे वाटते. स्वारांचा दोन टोळ्या आहेत, आंतून कोणत्या टोळींत संख्या अधिक आहे हें समजावें आणि प्रत्येक टोळीमध्ये किती स्वार आहेत हेंहि स्मरणांत ठेवतां यावें, असें एक पुरुष इच्छितो आहे, असें मनांत आण.

२. पहिली टोळी त्याचे समोरून जाते समर्थी, त्यांतील प्रत्येक मनुष्य जे त्याचे दृष्टीस पडते, त्याबद्दल तो पुरुष टोपलींत एक खडा टाकितो असें मनांत आण. प्रत्येक स्वाराविषयीं एकएक खडा आहे, ह्मणजे व्यवहारी बोलण्याप्रमाणें खड्यांची आणि स्वारांची संख्या सारिखीच आहे, याशिवाय खड्यांचा आणि स्वारांचा दुसरा कांहीं संबंध नाही. जासमर्थी दुसरी टोळी त्याचे समोरून जाती, तेव्हां तो दुसऱ्या टोपलींत प्रत्येक मनुष्याबद्दल एक एक खडा टाकितो असें मनांत आण; अशाने त्याजवळ खड्यांचा दोन टोपल्या होतील, तेणेंकरून प्रत्येक टोळीमध्ये किती स्वार आहेत, हें त्याचाने दुसऱ्या पुरुषास सांगवेल. आणि कोणती टोळी मोठी आहे, अथवा कोणतींत अधिक स्वार आहेत, असें जेव्हां तो जाणाय्यास इच्छितो, तेव्हां तो प्रत्येक टोपलींतून एक एक खडा काढून त्यांस एकीकडे वेगळाले ठेविल. नंतर त्यांतून एक टोपली रिकामी होईपर्यंत याप्रमाणें करित जाईल. नंतर त्यास जर समजेल, कीं दुसरीहि टोपली रिकामी झाली, तर तो असें ह्मणेल कीं दोहों टोळ्यांमध्ये स्वारांची संख्या सारिखीच आहे; आणि जर दुसऱ्या टोपलीमध्ये कांहीं खडे राहिले, तर पहिल्या टोळीपेक्षां दुसरीत किती स्वार अधिक होते, तें त्या राहिल्या खड्यांचा योगाने त्यास सांगतां येईल.

३. जा संख्या रानटी मनुष्यास अगल्याने स्मरणांत ठेवण्याचा असतील, त्यांची गणना त्यास वर सांगितलेल्या तऱ्हेने ठेवतां आली असावी. तशाच तऱ्हेने त्याचे मुलाबाळांची, किंवा गुरांची, किंवा उन्हाळे व हिंबाळे जितके त्याणें पाहिले असतील त्यांची गणती, खड्यांनीं, किंवा दुसऱ्या कांहीं लहान वस्तू, जा पुष्कळपणीं सांपडतात, त्यांहींकरून त्याणें ठेविली असावी. सांप्रतकाळीं हि रानटी लोकांमध्ये अशा कांहीं तऱ्हेचा प्रकार आहे, आणि यापेक्षां चांगल्ये रीतीची गणण्याची कल्पना निघाल्यानंतरहि कित्येक जागीं ती रीति तशीच राहिली आहे. रोम शहरांमध्ये प्रजाधिपत्याचे वेळेस, तें शहर वसल्यापासून वर्षे किती झालीं हें समजावें, ह्मणून तेथील मुख्य न्यायाधीश, बृहस्पतीचा देवळाचा दारांत प्रतिवर्षीं खिळा मारावा ह्मणून मोठे समारंभाने जात असे; शहर वसविल्यास किती वर्षे झालीं याचें स्मरण ठेवण्याची अशी एक रीति होती, यावरून ती गणनेची युक्ती निघाल्याचे पूर्वीं निघाली असावी असा संभव होतो.

४. खज्यांचा जा समुदायांचा पुष्कळ वेळा प्रसंग पडत असेल, त्यांस काळानुक्रमाने नावें ठेविलीं असावीं. परंतु जोंपर्यंत केवळ लहान संख्या मोजण्याची गरज होती, तोंपर्यंत त्यांचे मोजण्याचा सोयवार निर्वाह बोटानीं झाला असावा. जा कांहीं कामाकरितां थोड्या मोजण्याची गरज पडे, तेव्हां तीं कामें कोणताहि पुरुष आपल्या दोन्हीं हातांचा बोटानीं करित असे, आणि बोटाने वेगळाले समुदायांस नावेंहि देत असे. ह्मणजे, एक, दोन, तीन, चार, पांच, सहा, सात, आठ, नऊ, दहा, यांचे अर्थाचे शब्द त्याणें स्वभाषेंत काढले असावे. जसा जसा त्याचा व्यवहार अधिक वाढला असेल, त्याप्रमाणें त्यास अधिक मोठ्ये संख्यांस नावें देण्याचें, अगत्य पडलें असेल; परंतु जा सगळ्या संख्या कामांत आणाव्या लागल्या असतील, त्या सांगण्यासाठीं अतिशय शब्दांचें प्रयोजन लागलें असेल, आणि त्यांचा अतिशयपणा पाहून तो कुठित झाला असावा. यावरून कित्येक पहिल्या मूळ अंकांस वेगळालीं नावें देऊन, त्यांचा योगाने सर्व दुसऱ्या संख्या त्यास सांगतां आल्या असाव्या.

५. या सर्व गोष्टींचा क्रम आतां दाखवितों. या पुढील कोष्टकांत दहांचे पुढील जे अंक येतात, ते एक ओळींत मांडले आहेत, आणि दुसऱ्ये ओळींत त्यांचे पूर्वीचे अंकांचा संबंध दाखविला आहे.

एक.	अकरा	ह्मणजे	दहा आणि एक.
दोन.	बारा		दहा आणि दोन.
तीन.	तेरा		दहा आणि तीन.
चार.	चौदा		दहा आणि चार.
पांच.	पंधरा		दहा आणि पांच.
सहा.	सोळा		दहा आणि सहा.
सात.	सतरा		दहा आणि सात.
आठ.	अठरा		दहा आणि आठ.
नऊ.	एकुणीस		दोन दहा उणा एक.
दहा.	वीस		दोन दशक.



एकवीस	दोन दशक आणि एक.	पन्नास	छाणजे पांच दशक.
बावीस	दोन दशक आणि दोन.	साठ	सहा दशक.
इत्यादि	इत्यादि.	सत्तर	सात दशक.
तीस	तीन दशक.	ऐशी	आठ दशक.
इत्यादि	इत्यादि.	नव्वद	नऊ दशक.
चाळीस	चार दशक.	शंभर	दहा दशक.
इत्यादि	इत्यादि.		

एकशें एक	दहा दशक आणि एक.
इत्यादि	इत्यादि.
हजार	दहा शतक.
दहा हजार	शंभर शतक.
लक्ष अथवा शंभर हजार.	

दशलक्ष { दहा शंभर हजार अथवा हजार  
वेळा हजार.

कोटी.

दश कोटी.

इत्यादि.

६. गणनेमध्ये जें वारंवार कृत्य करावें लागतें, तें व्यवहारी भाषेचे शब्दांनीं लिहिण्यास अति लांब पडेल. याकरितां शब्दांचे जागीं लहान चिन्हे घेतलीं असतील; परंतु प्रत्येक निरनिराळे अंकास भिन्नभिन्न चिन्हे देण्यास असाध्य, छानून काहीं थोडकीं चिन्हे घेऊन, त्यांचा योगाने वाक्याचा सर्व अंकाविषयीं दुसरीं चिन्हे योजण्यास सोईस पडलें असेल. आतां जीं चिन्हे हालीं कामांत आणितात, तीं पुढील-प्रमाणे आहेत.

०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९.

शून्य, एक, दोन, तीन, चार, पांच, सहा, सात, आठ, नऊ.

जा रीतीने या चिन्हांपासून दुसरे अंक दाखवितां येतात, ती रीति आतां दाखवितों.

७. कोणीएक पुरुष, पहिल्याने आपलें एक बोट वर करितो, नंतर दोन बोटें, आणि याप्रमाणें, सगळीं बोटें वर होतपर्यंत क्रमाने वर करित जातो अशी कल्पना कर, आणि याप्रमाणेंच, दुसरे कित्येक पुरुष करि-

तात, असी कल्पना कर. यावरून पुरुषांचा दोन समुदायांतून, प्रत्येकाकडून काहीं बोटें वर करावल्याने, एक अंकापासून दुसरा अंक निराळा आहे, असे दाखवितां येईल; आणि असे अनेक तऱ्हांनीं करितां येईल हें स्पष्ट आहे. उदाहरण, पंधरा हा अंक पंधरा पुरुषांनीं एक एक बोट उंच केल्याने, अथवा चार पुरुषांनीं दोन दोन, आणि पांचव्याने सात बोटें वर केल्याने दाखवितां येईल, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. तो अंक दाखविण्यासाठीं, या सर्व युक्तींतून कोणती अति सुलभ पडेल ! ही शंका उत्पन्न होती, याकरितां जी युक्ति निवडून काढिलेली आहे, तिला अंकसंख्या लेखनवाचनरीति ह्मणतात.

८. मुलें जेव्हां पहिल्याने गणना करावयास लागतात, तेव्हां बहुत करून बोटानीं मोजितात, आणि अशा चालीवरून संभव होतो, कीं ही आपली गणना करण्याची रीति, आणि बहुतकरून पृथ्वीतील बाकीचा सर्व गणना करण्याचा रीती उत्पन्न झालेल्या असाव्या, ह्मणून वरचें व्याख्यान केलें आहे. जी रीति वर सांगितली ती केवळ रानटी आहे; परंतु, त्यांत किंचित् फेरफार केल्याने, अतिशय मोठा अंक सुलभपणीं दाखवितां येईल, असा प्रकार काढितां येईल.

९. मनांत आण कीं काहीं मोठी संख्या मोजावयाची आहे, जसे वस्त्राचे किलेक यार्ड मोजावयाचे आहेत. तुझे समोर एक मनुष्य बसविला आहे, जाची दृष्टी तुझेकडे असून, तूं जसा एक एक यार्ड मोजीत जातोस, तसा तो आपलें एक बोट वर करितो असे मनांत आण. जेव्हां दहा यार्ड मोजिले गेले, तेव्हां त्या पुरुषाचीं दहा बोटें वर झालीं असतील, आणि पुनः आरंभ केल्याबान्चून, त्याला पुढें मोजतां येणार नाहीं, ह्मणून अकरावे यार्डास तो एक बोट पुनः वर करील, आणि बारावे यार्डास दोन, आणि याप्रमाणें पुढें. परंतु किती यार्ड मोजिले गेले हें जाणायासाठीं, केवळ त्याचीं बोटें वर जितकीं आहेत, तितक्यांनीं पुरें माहित होणार नाहीं, परंतु त्याणें कितीवेळा पुनः पुनः आरंभ केला हें जाणलें पाहिजे. आतां मनांत आण कीं पहिल्या पुरुषाचे उजवेकडे दुसरा पुरुष बसविला आहे, आणि त्याची दृष्टी पहिल्यावर असून, तो पहिले पुरुषास पुनः प्रारंभ करिताना पाहतांच, ह्मणजे जेव्हां दहा यार्डांचें मोजणें संपतें, तत्क्षणीं तो आपलें एक बोट वर करितो. पहिल्या पुरुषाचें प्रत्येक बोट केवळ एक यार्डाचें दर्शक

आहे, परंतु दुसऱ्या पुरुषाचे प्रत्येक बोट पहिल्या पुरुषाचे सर्व बोटांचे, ह्मणजे, दहांचे दर्शक आहे. या तऱ्हेने शंभर पर्यंत मोजितां येईल, कां कीं दुसऱ्या पुरुषाचे एक बोट वर होण्याकरितां पहिल्या पुरुषाने आपली दहा बोटें एकवेळ मोजावीं, आणि दुसऱ्याचीं सर्व बोटें वर होण्याकरितां पहिल्या पुरुषाने आपली बोटें दहावेळ मोजावीं, यावरून (५) कलमाप्रमाणें, दहा दशक ह्मणजे शंभर. आतां दुसऱ्या पुरुषाचे उजव्येकडे तिसरा एक पुरुष बसिवला, तो जेव्हां दुसऱ्या पुरुषास पुनः पुनः प्रारंभ करिताना पाहील, तेव्हां तो आपलें एक बोट वर करील. या तिसऱ्या पुरुषाचे एक बोट दुसऱ्या पुरुषाचे सर्व दहा बोटांचे गणनेबरोबर, ह्मणजे, शंभरांबरोबर आहे. या तऱ्हेने तिसऱ्या पुरुषाचीं सर्व बोटें वर होतपर्यंत मोजितां येईल, आणि त्यापासून (५) कलमाप्रमाणें दहा शतक, किंवा एक हजार मोजले गेले असें कळेल. चवथ्या पुरुषाचे योगाने दहा हजारपर्यंत, पांचव्या पुरुषाचे योगाने लक्षपर्यंत, साहव्या पुरुषाचे योगाने दहा लक्षपर्यंत मोजण्याचे सामर्थ्य येईल; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

१०. प्रत्येक नवा पुरुष तुझे समोरचे ओळींत तुझे डाव्येकडे बसला आहे. आतां खालचेप्रमाणें कांहीं कोष्टक कर, आणि जे अंक दाखविण्याची इच्छा आहे, ते अंक त्या कोष्टकाचे उजव्येकडे शब्दांनीं लिही ; ते मोजणें झाल्यानंतर पहिल्या पुरुषाचीं जितकीं बोटें वर असतील, त्यांची संख्या उजव्येकडेचे पहिले ओळींत मांड, नंतर दुसऱ्या पुरुषाचीं जितकीं बोटें वर असतील, तितकी संख्या डाव्येकडेचे दुसऱ्या ओळींत मांड ; याप्रमाणें पुढेहि कर.

पाहिला.	दुसरा.	तिसरा.	चवथा.	पांचवा.	साहवा.	सातवा.
५	०	१	२	३	४	५
४	०	१	२	३	४	५
३	०	१	२	३	४	५
२	०	१	२	३	४	५
१	०	१	२	३	४	५
०	०	१	२	३	४	५
०	०	१	२	३	४	५
०	०	१	२	३	४	५
०	०	१	२	३	४	५
०	०	१	२	३	४	५

११. १ यांत सत्तावन हा अंक दाखविला आहे. याचा अर्थ (५) प्रमाणे पांच दशक आणि सात आहे. यामुळे पहिल्या पुरुषाने आपली सर्व बोटे पांचवेळा मोजून, त्यावर सात बोटे अधिक मोजिली आहेत. दुसऱ्या पुरुषाची पांच बोटे, आणि पहिल्या पुरुषाची सात बोटे उंच केल्याने, हे दाखविता येते. २ यांत एकशे आणि चार हा अंक दाखविला आहे. हा अंक (५) प्रमाणे दहा दशक आणि चार इतका आहे. यामुळे यांत दुसऱ्या पुरुषाने आपली सर्व बोटे एकवेळा मोजिली आहेत, हे तिसऱ्या पुरुषाने एक बोट उंच केल्याने दाखविता येते; परंतु दुसऱ्या पुरुषाने फिरून मोजल्यापावेतो तो एक बोट उंच करित नाही, आणि त्या दहातून केवळ चार मात्र मोजिले. जेव्हा पहिला पुरुष ते दहा मोजितो, तेव्हा दुसरा पुरुष एक बोट उंच करितो. आणि पहिला पुरुष फिरून आरंभ करायला तयार असून, त्याने काही बोटे वर केली नाही, आणि जो अंक याप्रमाणे निघाला तो अकरा दशक, किंवा दहा दशक आणि एक दशक, किंवा एक शतक आणि दहा. हा पक्ष वरचा तिसऱ्या उदाहरणांत आहे. आतां कोष्टकांतील सगळ्या दुसऱ्या अंकाविषयी कांहीं अवघड पडणार नाही.

१२. या सर्व अंकांतून जो अंक पहिल्या ओळीत लिहिला आहे, त्याचा अर्थ (६) कलमामध्ये जो त्या अंकाबद्दल लिहिला आहे, तितके याद मात्र दाखवितो. जो अंक दुसऱ्या ओळीत लिहिला आहे, तो

तितके याडांचा नाही, परंतु तो याडांचे तितके दशक दाखवितो; जो अंक निसर्ग्ये ओळींत लिहिला आहे, तो याडांचे तितके शतक दाखवितो; जो अंक चवथ्ये ओळींत लिहिला आहे, तो तितके सहस्र दाखवितो; आणि याप्रमाणें पुढेहि; ह्मणजे, जर कोणताहि अंक कोणत्येहि ओळींतून त्याचे डाव्येकडचे ओळींत जाईल, तर तो त्याचे पूर्वी जितके याडें दाखवीत होना, त्याचे दहापट किमतीचा होईल. ही गोष्ट पक्की स्मरणांत ठेविली असतां ओळींमध्ये रेषा करण्याचें प्रयोजन नाही, कां कीं अंकाचे स्थितीपासून प्रत्येक अंकाची पुरतेपणीं किंमत समजण्यांत येईल; ह्मणजे जितके अंक त्याचे उजव्येकडेस असतील त्यांवरून कळेल.

१३. आपल्या ह्या अंक लिहिण्याचे रीतीचा इतका सहवास झाला आहे, कीं ती मूळची असावी असी दिसती, तथापि ती कोणत्येहि दुसऱ्ये रीतीपेक्षां अधिक मूळची नाही, हें स्मरणांत ठेवायास योग्य आहे. उदाहरण, एक दशक दाखविण्याविषयी, एक या अंकाचे बाजूस एक स्वरचिन्ह केल्याने निर्वाह होतो असें जर कदाचित् मानिलें, जसे १'; वीस अथवा दोन दशक, २' याणें दर्शवितां येतील; आणि याप्रमाणें पुढेहि; शंभर अथवा दहा दशक १'' याणें; सहस्र १''' याणें; आणि याप्रमाणें पुढेहि. या रीतीने कोष्टकांतील चवथी संख्या याप्रमाणें लिहितां येईल, ह्मणजे २''' ३'' ४' ८, आणि हे तर याप्रमाणेंहि मांडितां येतील, ह्मणजे ८ ४' ३'' २''', ४' ८ ३'' २''; अथवा अंकाची रचना कोणत्येहि भिन्न भिन्न तऱ्हेने करितां येईल, कां कीं त्यांचा अर्थ त्यांचे डोक्यावरील स्वर चिन्हावरून होतो, त्यांचा स्थितिक्रमापासून होत नाही. यावरून अशे रीतीमध्ये शून्याचें कधीहि प्रयोजन पडणार नाही; कां कीं १०४ आणि १४ यांचें तारतम्य या रीतीने कळेल, ह्मणजे पहिला १'४, आणि दुसरा १'४ अज्ञाने कळेल. जी हालीं व्यवहारांत रीति आहे, ती यापेक्षां खरी आणि बरोबर आहे, याकरितां मान्य झाली असें नाही, परंतु ती हिजपेक्षां सोपी आहे यास्तव मान्य झाली आहे.

१४. प्रत्येक अंकाचा अर्थ काहींसा स्थानापासून कळतो, हा भेद आमचे, आणि आमचे पूर्वजांचे अंकसंख्या लेखन वाचनाचे रीतीमध्ये आहे. जसे, ४४४४४ यांत प्रत्येक चार काहीं वस्तूचे चार दाख-

वितो; परंतु जितके खडे मोजिले त्यांतून उजव्येकडील पहिल्या स्थळींचा अंक, चार मात्र दाखवितो; दुसऱ्या स्थळींचा, दहा खड्यांचे असे चार समुदाय दाखवितो; तिसऱ्या स्थळींचा, शंभरांचे चार समुदाय दाखवितो; आणि याप्रमाणे पुढेहि.

१५. (११) या कलमांत जी वस्तु मोजिली गेली, ते कापडाचे यार्ड होते. त्या पक्षांत कापडाचा जो एक यार्ड त्यास एकं ह्मणतात. उजव्येकडील जो पहिला अंक आहे, त्यांत (६) कलमाप्रमाणे जितके एकं आहेत, तितके एकंचा तो दर्शक आहे, ह्मणून तो एकंचे स्थळीं आहे असें ह्मणतात. दुसऱ्या अंकांत जितके एकं आहेत, तितके दशक तो दाखवितो, ह्मणून तो दहंचा स्थळीं आहे असें ह्मणतात. तसेच कारणावरून तिसरा, चवथा, आणि पांचवा हे अंक, शतं, सहस्र आणि दशसहस्र यांचे स्थळीं आहेत असें ह्मणतात.

१६. मोजलेले परिमाण जर भूमीचे एकर असते, तर एकं ह्मणजे जा वस्तु मोजिल्या त्यांतून एक आहे, यावरून भूमीचा एक एकरास एकं असें ह्मटलें असते. परिमाणे दोन जातींचीं असतात; ह्मणजे जामध्ये एकंची पूर्ण संख्या आहे, जसे ४७ यार्ड, आणि जामध्ये तसी संख्या नाही, जसे ४७ यार्ड आणि अर्धा. या दोहों जातींतून पहिल्याने पूर्ण अंकाचा विचार करितो.

१७. गणितांमध्ये बहुतरुन सर्व परिमाणांस एक जातीचा एकं असावा. २ आणि ३ मिळून ५ होतात, यावरून २ यार्ड आणि ३ फुटी मिळून, ५ यार्ड किंवा ५ फुटी होतात असें ह्मणवत नाही; तथापि २ यार्ड आणि ३ यार्ड मिळून, ५ यार्ड होतात, आणि २ फुटी आणि ३ फुटी मिळून, ५ फुटी होतात असें ह्मणता येईल. एक जातीचे परिमाण दुसऱ्या जातीचे परिमाणाचे एकंने मोजणें ही अबुक्तिक गोष्ट होईल; ह्मणजे एक ग्यालनांत किती यार्ड आहेत, अथवा पाण्याचे मापांत दाण्याचे किती शेर आहेत, असें सांगणें निरर्थक आहे.

१८. काहीं जातीचे एकंचे संख्येविषयी जा गोष्टी खऱ्या आहेत, त्या दुसऱ्या जातीचे एकंचे त्याच संख्येविषयी खऱ्या आहेत. जसे, १५ खडे आणि ७ खडे मिळून २२ खडे होतात; १५ एकर आणि ७ एकर मिळून २२ एकर होतात. यावरून १५ आणि ७ मिळून २२ होतात असें ह्मणतां येतें, ह्मणजे अर्थ हाच कीं एक जाती-

चा १५ वस्तू, आणि त्याच जातीचा ७ वस्तू मिळून, त्याच जातीचा २२ वस्तू होतात, त्या वस्तू खडे किंवा स्वार किंवा भूमीचे एकर किंवा दुसऱ्या कोणत्याहि जातीचा वस्तू असतील. सारांश १५ आणि ७ मिळून २२ होतात, याशिवाय याविषयीं दुसरें कांहीं लिहिण्याचें प्रयोजन नाहीं. यामुळे खडे किंवा एकर अशा निरनिराळ्या वस्तूंचा एक-विषयीं या विषयाचे या भागांत पुनः कांहीं बोलणार नाहीं, परंतु केवळ अंकांविषयीं मात्र सांगितलें जाईल.

१९. या अध्यायांत जा मुख्य गोष्टी सांगितल्या त्या एथें पुनः सांगतों.

पहिल्याने, दहा चिन्हें कामांत घेतलीं आहेत, ह्मणजे एक चिन्ह शून्याचे जागीं, आणि बाकी चिन्हें पहिल्या नऊ अंकांचे जागीं घेतलीं आहेत तीं याप्रमाणें.

०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, यांतून पहिल्याला शून्य ह्मणतात.

दुसऱ्याने, यापेक्षां मोठ्या अंकांकरितां निरनिराळीं चिन्हें नाहींत, परंतु वर सांगितलेलीं चिन्हें एकाचे बाजूस एक मांडल्याने, आणि जो उजव्याकडचा पहिला अंक आहे, तो एकटा मांडला असतां जी त्याची किंमत असती तीच तो ठेवील; उजव्याबाजूचा दुसरा अंक, एकटा मांडिला असतां जी त्याची किंमत असती, तिचे दहावेळा किमतीचा अर्थ ठेवील; उजव्या बाजूचा तिसरा अंक, एकटा मांडिला असतां जी त्याची किंमत असती, तिचे शंभरवेळा किमतीचा अर्थ ठेवील; चवथा अंक तितक्याचे सहस्रवेळा; आणि याप्रमाणें पुढेहि; असें मान्य केल्याने ते मोठे अंक दाखवितां येतात.

तिसऱ्याने, उजव्या बाजूचा पहिला अंक एकचे स्थळीं, त्याचे डाव्या बाजूचा अंक दहाचे स्थळीं, तिसरा शतके स्थळीं, आणि याप्रमाणें पुढे आहेत असें ह्मणतात.

चवथ्याने, जेव्हां कोणताहि अंक दशक, शतक किंवा सहस्र, इत्यादि बरोबर पूर्ण संख्या आहे, तेव्हां इच्छिलेले संख्येचे स्थळीं तो अंक येई इतकीं त्याचे उजव्याकडे शून्यें मांडिलीं पाहिजेत, याविषयीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत.

पन्नास, अथवा पांच दशक.. . . . . ५०

सातशें. . . . . ७००

पांचलक्ष अठ्ठावीस हजार.. . . . . ५२८०००

यांत शून्यें नसतील, तर नुसते अंक ५, ७, ५२८ हे आहेत असे चुकून समजांत येतील.

पांचव्याने, एक, दहा इत्यादि संज्ञांतून कोणत्याहि एक संज्ञेचे जागी अंक नसेल, तर अंकाचे मध्ये शून्य मांडावें लागतें. जसें, वीस हजार आणि सहा हे २०००६ आहेत, दोनशें सहा हे २०६ आहेत. अंकाचे आरंभी शून्य मांडितां येईल, परंतु तेथें त्याचा कांहीं अर्थ नाही. जसें ०२६ हे आणि २६ एकच आहेत, कां की त्यांत शत नाहींत इतकें मात्र शून्य दाखवितें आणि ही गोष्ट केवळ अंकापासून स्पष्ट आहे.

२०. १६७८५ अशा भलत्या कोणत्याहि अंकांतून, कोणतेहि जवळजवळचे अंक काढिले, जसें ६७, आणि जर असें विचारिलें, कीं या सतसष्टांचा अर्थ काय आहे? ते कोणत्या परिमाणाचे सतसष्ट आहेत? तर उत्तर हेंच, कीं जा स्थळीं ७ हा अंक त्या संख्येत होता, तशाच समुदायाचे सतसष्ट; छणजे, ६७ शतक आहेत. कां की ६ हे सहा सहस्र, किंवा सहा दशशतक, किंवा साठ शतक आहेत; हे साठ शतक आणि दुसरे ७ शतक मिळून, ६७ शतक आहेत; याचप्रमाणें, ६७८ हे ६७८ दशक आहेत. यावरून हे अंक या पुढील कोणत्याहि रितीने सांगतां येतील.

१ दहा हजार ६ हजार ७ शतक ८ दशक आणि ५;

अथवा १६ हजार ७८ दशक आणि ५;

अथवा १ दहा हजार ६७८ दशक आणि ५;

अथवा १६७ शतक ८ दशक आणि ५;

अथवा १६७८ दशक आणि ५, आणि याप्रमाणें पुढें.

२१ अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

पहिलें. या पुढील अंकांचीं चिन्हें मांड.

चारशें सहाशतक;

दोन हजार सव्याण्व;

चौसष्ट हजार तीनशें पन्नास;



दोन कोटी सातशे चार ;

सत्तावन कोटी ऐशालाख.

दुसरें. हे पुढील अंक शब्दांनीं लिही, ५३, १८०५, १८३०, ६६७०७, १८०९१७३२४, ६६७१३७२१, ९०९७ ६३९०, २५००००००.

तिसरें. ९९९९९ अशा जा अंकसंख्येमध्ये केवळ नऊ हीं चिन्हें आहेत, त्यास एक मिळविला असतां, त्यांत काय भेद होईल तो सांग !

चवथें. कांहीं एक संख्येमध्ये पांच अंक आहेत, आणि दुसरीमध्ये चार अंक आहेत, आणि जरी पहिल्ये संख्येमध्ये सगळे अंक लहान आहेत, आणि दुसरीमध्ये सगळे मोठे आहेत, तरी पहिली संख्या दुसरीपेक्षा मोठी आहे हें दाखीव ! उदाहरण, १०१११ ही संख्या ९८७९ या संख्येपेक्षा मोठी आहे हें दाखीव !

२२. कित्येक शुद्ध चिन्हांचीं स्थळें जशीं बदलतात, तशा त्यांचा किमतीहि बदलतात, अशा कल्पनेवरून आपल्या लेखनवाचनरीतीचा सुलभपणा लक्ष्यांत येईल. व्यवहारांतील जा सगळ्या वस्तू कामांत आणितात, त्यांची तशेंच रीतीने गणना केल्याने तसेंच हित होतें. उदाहरण, रुपये, आणे, आणि पै, असे पैक्याचे विभाग केल्याने पैका मोजतां येतो, यांतून एक आणा ह्मणजे १२ पै आहेत, आणि एक रुपया ह्मणजे १६ आणे आहेत, अथवा १९२ पै. रुपये, आणे, पै यांस वेगळाले तीन ओळींत मांडितात, आणि प्रत्येक ओळीचे मध्ये बिंदू मांडितात. जसें, २६३ पै यांस केवळ २६३ असे मांडांत नाहींत, परंतु रु१. ९. ३, मांडितात यांत रु यापासून असे समजावें कीं पहिली ओळ रुपयांची आहे. ही एक अंकसंख्या लेखनवाचनाची परिपाठी आहे, जींत उजव्याकडून दुसऱ्ये ओळीचा अंक, पहिल्ये ओळीचे त्याच अंकाचे १२ पट मोठा आहे, आणि जो अंक तिसऱ्ये ओळींत येतो, तो दुसऱ्ये ओळीतील त्याच अंकाचे १६ पट आहे, अथवा पहिले ओळीचे त्याच अंकाचे १९२ पट मोठा आहे. यापुढें जे कोष्टक पाहण्यांत येतील त्यांत अंकसंख्या लेखनवाचनाची दुसरी परिपाठी पाहण्यांत येईल, परंतु सर्वाविषयीं गणना करण्याचा रिती एकसारख्याच होतील.

२३. अंकगणिताची भाषा संक्षिप्त करण्याकरितां, कांहीं दुसरीं चिन्हें कामांत घेतात. तीं या पुढीलप्रमाणें आहेत :

पहिले. १५+३८ याचा अर्थ हाच कीं १५ यांशीं ३८ मिलवा-  
वयाचे आहेत, ते आणि ५३ एकच आहेत. ही १५ आणि ३८  
यांची बेरीज आहे, आणि त्यांस याप्रमाणें वाचितात ह्मणजे पंधरा अ-  
धिक अडतीस.

दुसरे. ६४-१२ याचा अर्थ हाच कीं ६४ यांतून १२ वजा  
करावयाचे आहेत, आणि ते आणि ५२ एकच आहेत. ही ६४ आणि  
१२ यांची वजाबाकी आहे, आणि त्यांस याप्रमाणें वाचितात ह्मणजे  
चवसष्ट उणे बारा.

तिसरे. ९×८ याचा अर्थ हाच, कीं ९ हे ८ वेळा घेण्याचे आ-  
हेत, आणि ते आणि ७२ एकच आहेत. हा ९ आणि ८ यांचा  
गुणाकार आहे, आणि त्यांस नऊ गुणिले आठ याप्रमाणें वाचितात.

चवथे.  $\frac{१०८}{६}$  याचा अर्थ हाच कीं १०८ हे ६ नीं भागावयाचे आहेत,  
अथवा १०८ यांमध्ये कितीवेळा ६ आहेत हें काढावयाचें; आणि ते आणि  
१८ एकच आहेत. हा १०८ आणि ६ यांचा भागाकार आहे; आणि  
त्यांस एकशें आठ भागिले सहांनीं असे वाचितात.

पांचवें. जेव्हां भलते दोन अंक, अथवा अंकांचे समुदाय, वर लि-  
हिलेल्या चिन्हांनीं युक्त असून, एकसारखे असतात, तेव्हां त्यांचेमध्ये  
= हें चिन्ह मांडितात. जसे, ७ आणि ५ मिळून १२ होतात, आणि  
त्यास ७+५=१२, असे मांडितात. यास समीकरण ह्मणतात, आणि  
त्यास सात अधिक पांच बरोबर बारा असे वाचितात. याचप्रमाणें  
हवीं तेवढीं समीकरणें केलीं जातील हें स्पष्ट आहे. जसें

$$७ + ५ - ३ = १२ + १;$$

$$\frac{१३}{२} - १ + ३ \times २ = ११, \text{ आणि याप्रमाणें पुढे.}$$

२४. जें केवळ एक अंकाविषयीं खरें आहे असें नाहीं, परंतु तें सर्व  
अंकांविषयीं खरें असतें, त्याविषयीं बहुधा काहीं बोलण्याचा प्रसंग पड-  
तो. उदाहरण, १० आणि ७ हे दोन अंक घे; त्यांची बेरीज १७  
आहे, त्यांची वजाबाकी ३ आहे. जर ही बेरीज आणि ही वजाबाकी  
मिलविली तर २० होतील, ह्मणजे हे पूर्वी घेतलेल्या दोन अंकांतून  
मोठ्या अंकाचे दुप्पट आहेत. जर १७ तून ३ वजा केले, तर १४

+ पुस्तकाचे या भागांत जें लहान गणित करावें लागतें, तें बोटनीं अथवा खब्यांनीं क-  
रितां येईल.

होतात, हे त्या दोन अंकांतून लहानाची दुप्पट आहेत. कोणत्याहि दोन अंकांविषयी ही गोष्ट खरी आहे असें दिसेल, आणि यावरून ही सामान्य प्रतिज्ञा निघती; जर कोणत्याहि दोन अंकांची बेरीज आणि वजाबाकी मिळविली, तर ती बेरीज त्या दोन अंकांतून मोठ्या अंकाचे दुप्पट होईल; जर त्यांचे बेरीजेतून त्यांची वजाबाकी वजा केली, तर बाकी त्या दोहोंतून लहान अंकाचे दुप्पट होईल. यावरून, जर भलते कांहीं अंक घेतले, आणि त्यांस पहिला अंक आणि दुसरा अंक असें हटलें, आणि जर पहिला अंक दुसऱ्या अंकापेक्षा मोठा असेल; तर या पुढीलप्रमाणें होईल.

$$(पहि० अं० + दुस० अं०) + (पहि० अं० - दुस० अं०) = दुप्पट पहि० अं०$$

$$(पहि० अं० + दुस० अं०) - (पहि० अं० - दुस० अं०) = दुप्पट दुस० अं०$$

वेगवेगळ्या कुंडल्या जोडणारीं जीं चिन्हे आहेत तीं कामांत आणण्याचे पूर्वी, जें कुंडलींत करायास सांगितलें तें पहिल्याने केलें पाहिजे. जसें,  $८ - (२ + १) \times (१ + १)$  याचा अर्थ हाच कीं  $२ + १$  हे पहिल्याने  $१ + १$  वेळा घ्यावे, नंतर तो गुणाकार  $८$  तून वजा करावा. तशाच रितीने दोन किंवा अधिक अंकांनीं जें उत्तर येतें, आणि ते अंक कसेहि असोत त्याविषयी जर तें उत्तर खरें आहे, तर पहिला अंक, दुसरा अंक इत्यादि त्यांचे जागीं मांडून, आणि  $(२३)$  कलमांतील चिन्हे कामांत आणून तें उत्तर दाखवितां येईल. परंतु यास यापेक्षा अधिक संक्षेपरूप देतां येईल, कां कीं पहिला अंक, दुसरा अंक, इत्यादि हे भलत्या कोणत्याहि अंकांचे दर्शक होतील, तर अशे शब्दांचा जागीं अ आणि ब हीं अक्षरे कामांत आणितां येतील; आणि आतां लक्षांत ठेविलें पाहिजे कीं कोणत्याहि दोन अंकांचे स्थळीं अ आणि ब आहेत, आणि त्यांत ब पेक्षां अ मोठा आहे. दोन वेळा अ दाखविण्यासाठीं २अ घे, आणि दोन वेळा ब दाखविण्यासाठीं २ब घे. तर समीकरणें या पुढीलप्रमाणें होतात.

$$(अ + ब) + (अ - ब) = २ अ$$

$$(अ + ब) - (अ - ब) = २ ब$$

खाली लिहिल्याप्रमाणें याचा अधिक विस्तार होईल.

२५. मनांत आण कीं, कित्येक बंद केलेलीं पुडकी आहेत. आणि त्यांवर बाहेरून अ, ब, क, ड, इत्यादि खुणा आहेत, त्या प्रत्येका-

मध्ये निरनिराळ्या चकत्यांचा संख्या आहेत, परंतु एकएक पुढक्यांत किती किती आहेत, त्या ठाऊक नाहीत. जोंपर्यंत प्रत्येक पुढक्यांत किती किती आहेत, हें ठाऊक नाही तोंपर्यंत पुढक्यावर जें अक्षर आहे, तें त्या चकत्यांचे जागीं घेतां येईल, ह्मणजे अ अक्षराने जें पुढकें खूण केलेलें आहे, त्यांतील चकत्यांचे अंकांचे जागीं अ संख्या आहे असें ह्मटलें जातें. आणि जरी चकत्यांचे संख्याविषयीं अगदीं बरोबर ठाऊक नाही, तरी त्या अंकसंख्याविषयीं कांहींच ठाऊक नाहीं असें नाही; कां कीं सर्व अंकांमध्ये कांहीं तऱ्हेचे संबंध असतात, त्यांस अंकांचे साधारण गुण ह्मणतात. उदाहरण, भलता कांहीं अंक घेऊन, त्याणे तोच गुणून, त्या गुणाकारांतून एक वजा कर; नंतर घेतल्या अंकांतून एक वजा कर. ह्मणजे घेतलेला अंक एकाने वाढविला तितके वेळा दुसरा अंक पहिल्या अंकांत जाईल. ६ हा अंक घे, हा त्याणे तोच गुणिला तर ३६ होतात, त्यांतून एक वजा केला तर ३५ राहतात; पुनः, ६ तून एक वजा करून ५ होतात; आणि ५ हे ३५ मध्ये ७ वेळा जातात, ह्मणजे, ६ + १ वेळा. ही गोष्ट कोणत्याहि अंकाविषयीं खरी आहे, हें कळेल; आणि असें सिद्ध झाल्यावर जें पुढकें अ या अक्षराने अंकलें आहे, त्यांतील संख्येविषयीं किंवा अ संख्येविषयींहि खरें आहे असें ह्मणतां येईल. जर अ ने अ गुणिला हें दाखविण्यासाठीं अ<sup>+</sup> अशे तऱ्हेने मांडिला, तर (२३) प्रमाणें

$$\frac{\text{अअ} - १}{\text{अ} - १} = \text{अ} + १$$

२६. यावरून कांहीं अंकाविषयीं सांगातल्यावांचून, जर त्याविषयीं कांहीं बोलण्याची इच्छा असेल, तर तो अंक दाखविण्यासाठीं अक्षर कांमांत घेतात. जसें; भलता कांहीं अंक तीन भागांत विभागावयाचा आहे, तो अंक काय आहे, अथवा जा भागांत विभागावयाचा ते भाग काय आहेत, असें न विचारितां, त्या अंकाशीं अशी कृती केल्यापासून काय निघेल, त्याजवर तर्क करण्याची इच्छा आहे, असें मनांत आण. तो अंक दाखविण्यासाठीं अ घे, आणि जा भागांत तो विभागावयाचा

+ (२३) कलमाप्रमाणें अअ हा अ × अ असावा, परंतु एथें × या चिन्हाची गरज नाही. २ × ७ यांत, जे १४ आहेत त्यांशीं आणि २७ यांची घालमेळ होऊं नये, ह्मणून या चिन्हास अंकांशीं कांमांत आणितान.

आहे, ते भाग दाखविण्यासाठी व, क आणि ड घे. तर कल्पनेप्रमाणें,  
 $अ = व + क + ड.$

याजवर तर्क करून उत्तरें काढितात, तीं केवळ कोणत्याहि एकच विशेष अंकाविषयीं खरीं आहेत असें नाहीं, परंतु सर्वाविषयीं खरीं आहेत. जसें, जर अंकांतून एक भाग वजा केला, तर दुसरे दोन भाग राहतील, अथवा

$$अ - व = क + ड.$$

जर प्रत्येक भागाची दुप्पट केली, तर सर्व अंकाची दुप्पट होईल, अथवा

$$२अ = २व + २क + २ड.$$

भागांतल्या कोणताहि एक भाग, जसा ड, यांतून क्ष अंक वजा केला, तर तितक्याने सगळा अंक कमी होईल, अथवा.

$$अ - क्ष = व + क + (ड - क्ष)$$

अशा रीतीने अंकांचे साधारण गुणांवर तर्क करणें, हें बीजगणित-विद्येचें काम आहे.

### २७. अभ्यासासाठी उदाहरणें.

जेव्हां  $अ = १२$ ,  $व = १८$ ,  $क = ७$ , तेव्हां  $अ + २ व - क$  याची किंमत काय आहे? उत्तर ४१.

जेव्हां  $अ = ६$ , आणि  $व = २$ , तेव्हां  $\frac{अ अ - व व}{अ - व}$  याची किंमत काय आहे? उत्तर ८.

अ, व, क आणि ड, यांचा पुढें लिहिलेल्या किमतींपासून,  $(अ+व) \times (क + ड)$  आणि  $अ + व क + ड$  यांमध्ये अंतरें काय आहेत?

अ	व	क	ड	उत्तरें.
१	२	३	४	१०
२	१२	७	१	२५
१	१	१	१	१

## दुसरा भाग.

### मिळवणी आणि वजावाकी.

२८. अंकगणितांत जा कृतींत अंकांस वाढविणें, किंवा घटविणें, येत नाहीं असी कृति एकहि नाही. याकरितां खड्यांचे समुदायांनीं करवत नाहीं असी कांहींच कृति नाही. बहुतकरून, पहिल्याने खडे किंवा बोटें कामांत घेतलीं असतील. खडे घेऊन जा गगना लांब आणि श्रमांचा असतात, त्या एकदांच थोड्या श्रमाने बगव्या, क्षणून संक्षिप्त गणण्याचा रिती काढल्या आहेत. त्यांतील मिळवणी, वजावाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, या चार मुख्य रिती आहेत; यांतून शेवटील दोन रिती आहेत, त्या पहिली आणि दुसरी यांस केवळ एकदांच करण्याकरितां आहेत.

२९. जेव्हां एक अंक दुसऱ्या अंकाने वाढविला आहे, तेव्हां जो अंक ते दोन अंक एकत्र केल्याने होतो, त्यास दोन अंकांचा बेरीज म्हणतात. दोन किंवा अधिक अंकांचा बेरीज करण्याचे रितीला मिळवणी म्हणतात, आणि पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें, जे अंक परस्पर मिळवायाचे आहेत, त्यांचामध्ये (+) असे चिन्ह मांडून मिळवणी दाखविली जाते.

मनांत आण कीं १८३४ आणि २७९९ यांची बेरीज करावयाची आहे. या अंकांची मिळवणी करावयाकरितां, त्यांचे तुकडे कर, झगजे प्रत्येकाला एक, दहं, शतं, सहस्र, असे विभाग;

१८३४ हे १ सहस्र ८ शतक ३ दशक आणि ४ आहेत;

२७९९ हे २ सहस्र ७ शतक ९ दशक आणि ९ आहेत.

प्रत्येक अंकाचे या रितीने चार भाग होताना, जर पहिल्यांच प्रत्येक भागाशीं, दुसऱ्यांचा त्याचे खालचा प्रत्येक भाग मिळवून, जीं वेगळालीं उत्तरे येतात, तीं एकत्र केलीं असतां, १८३४ आणि २७९९ यांची मिळवणी होईल. पहिल्या अंकांत ४ एक आहेत, दुसऱ्यांत ९ आहेत; यांस मिळविले असतां, बेरीजेत १३ एक येतील. पुनः पहिल्या अं

आहे, ते भाग दाखविण्यासाठीं ब, क आणि ड घे. तर कल्पनेप्रमाणें,

$$अ = ब + क + ड.$$

याजवर तर्क करून उत्तरें काढितात, तीं केवळ कोणत्याहि एकच विशेष अंकाविषयीं खरीं आहेत असें नाहीं, परंतु सर्वाविषयीं खरीं आहेत. जसें, जर अंकांतून एक भाग वजा केला, तर दुसरे दोन भाग राहतील, अथवा

$$अ - ब = क + ड.$$

जर प्रत्येक भागाची दुप्पट केली, तर सर्व अंकाची दुप्पट होईल, अथवा

$$२अ = २ब + २क + २ड.$$

भागांतला कोणताहि एक भाग, जसा ड, यांतून क्ष अंक वजा केला, तर तितक्याने सगला अंक कमी होईल, अथवा.

$$अ - क्ष = ब + क + (ड - क्ष)$$

अशा रीतीने अंकांचे साधारण गुणांवर तर्क करणें, हें बीजगणित-विद्येचें काम आहे.

### २७. अभ्यासासाठीं उदाहरणें.

जेव्हां  $अ = १२$ ,  $ब = १८$ ,  $क = ७$ , तेव्हां  $अ + २ब - क$  याची किंमत काय आहे ?

उत्तर ४१.

जेव्हां  $अ = ६$ , आणि  $ब = २$ , तेव्हां  $\frac{अ - ब ब}{अ - ब}$  याची किंमत काय आहे ?

उत्तर ८.

अ, ब, क आणि ड, यांचा पुढें लिहिलेल्या किमतींपासून,  $(अ + ब) \times (क + ड)$  आणि  $अ + ब क + ड$  यांमध्ये अंतरें काय आहेत ?

अ	ब	क	ड	उत्तरें.
१	२	३	४	१०
२	१२	७	१	२५
१	१	१	१	१

## दुसरा भाग.

### मिळवणी आणि वजावाकी.

२८. अंकगणितांत जा कृतींत अंकांस वाढविणें, किंवा घटविणें, येत नाहीं असी कृति एकहि नाही. याकरितां खड्यांचे समुदायांनीं करवत नाहीं असी कांहींच कृति नाही. बहुतकरून, पहिल्याने खडे किंवा बोटें कामांत घेतलीं असतील. खडे घेऊन जा गगना लांब आणि श्रमांचा असतात, त्या एकदांच थोड्या श्रमाने वाज्या, क्षणून संक्षिप्त गणण्याचा रिती काढल्या आहेत. त्यांतील मिळवणी, वजावाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, या चार मुख्य रिती आहेत; यांतून शेवटील दोन रिती आहेत, त्या पहिली आणि दुसरी यांस केवळ एकदांच करण्याकरितां आहेत.

२९. जेव्हां एक अंक दुसऱ्या अंकाने वाढविता आहे, तेव्हां जो अंक ते दोन अंक एकत्र केल्याने होतो, त्यास दोन अंकांचा बेरीज झगतात. दोन किंवा अधिक अंकांचा बेरीज करण्याचे रितीला मिळवणी झगतात, आणि पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें, जे अंक परस्पर मिळवायाचे आहेत, त्यांचामध्ये (+) असे चिन्ह मांडून मिळवणी दाखविली जाते.

मनांत आण कीं १८३४ आणि २७९९ यांची बेरीज करावयाची आहे. या अंकांची मिळवणी करावयाकरितां, त्यांचे तुकडे कर, झगजे प्रत्येकाला एकं, दहं, शतं, सहस्र, असे विभाग;

१८३४ हे १ सहस्र ८ शतक ३ दशक आणि ४ आहेत;

२७९९ हे २ सहस्र ७ शतक ९ दशक आणि ९ आहेत.

प्रत्येक अंकाचे या रितीने चार भाग होतात, जर पहिल्याचे प्रत्येक भागाशी, दुसऱ्याचा त्याचे खालचा प्रत्येक भाग मिळवून, जीं वेगळालीं उत्तरे येतात, तीं एकत्र केलीं असतां, १८३४ आणि २७९९ यांची मिळवणी होईल. पहिल्या अंकांत ४ एकं आहेत, दुसऱ्यांत ९ आहेत; यांस मिळविले असतां, बेरीजेत १३ एकं येतील. पुनः पहिल्या अं



कांत तीन दशक आणि दुसऱ्यांत ९ दशक मिळून बेरिजेंत १२ दशक येतील. पहिल्या अंकांत ८ शतक आणि दुसऱ्यांत ७ शतक मिळून बेरिजेंत १५ शतक येतील; आणि पहिल्या अंकांत १ सहस्र आणि दुसऱ्या अंकांत २ सहस्र मिळून बेरिजेंत ३ सहस्र येतील; यामुळे इच्छिली बेरीज याप्रमाणें आहे,

३ सहस्र, १५ शतक, १२ दशक, आणि १३ एक.

या उत्तरास सोपें रूप देण्याकरितां, स्मरणांत ठेवावें कीं—

१३ एकं हे. . . . . १ दशक आणि ३ एकं आहेत.

१२ दशक हे. . . . . १ शतक आणि २ दशक आहेत.

१५ शतक हे. . . . . १ सहस्र आणि ५ शतक.

३ सहस्र हे. . . . . ३ सहस्र.

आतां, पूर्वी केल्याप्रमाणें उजव्याकडचे अंक एकत्र करून, १८३४ आणि २७९९ यांची बेरीज होईल; ह्मणजे, ४ सहस्र, ६ शतक, ३ दशक, आणि ३ एक, यांस (१९) कलमावरून याप्रमाणें मांडितात ४६३३.

३०. वरची कृति, (२३) कलमाप्रमाणें चिन्हांनीं मांडिली असतां, या पुढीलप्रमाणें होय;

$$१८३४ = १ \times १००० + ८ \times १०० + ३ \times १० + ४$$

$$२७९९ = २ \times १००० + ७ \times १०० + ९ \times १० + ९$$

यामुळे,

$$१८३४ + २७९९ = ३ \times १००० + १५ \times १०० + १२ \times १० + १३$$

$$\text{परंतु} \quad १३ = \quad १ \times १० + ३$$

$$१२ \times १० = \quad १ \times १०० + २ \times १०$$

$$१५ \times १०० = \quad १ \times १००० + ५ \times १००$$

$$३ \times १००० = \quad ३ \times १००० \quad \text{यामुळे,}$$

$$१८३४ + २७९९ = ४ \times १००० + ६ \times १०० + ३ \times १० + ३ \\ = ४६३३.$$

३१. सगळे पक्ष तशेच रितीने केले पाहिजेत, परंतु तितक्या लांब विस्ताराने करूं नये. हें करण्यासाठीं मूळ अंकांची बेरीज कशी करावी हें समजलें पाहिजे. हें तर केवळ स्मरणाने करितां येईल; आ-

णि स्मरणाचे सहाय्याकरितां शिकणाराने आपल्या कामासाठीं हे पुढील कोष्टक तीन चार वेळा पुनःपुनः करावे;

०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११
३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२
४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३
५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४
६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५
७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६
८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७
९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८

कोष्टकाचा उपयोग या पुढीलप्रमाणें करितात; मनांत आण कीं ८ आणि ७ यांची बेरीज करावयाची आहे. डाव्येकडचे उभ्ये ओळींत त्यांतून कोणताहि एक अंक शोधून काढ, जसें ८; आणि वरचे आडव्ये ओळींत ७ पाहा. ८ चे ओळींत ७ याखाली १५ दिसतात, ती त्या दोन अंकांची बेरीज आहे.

३२. प्रत्येक नवांपेक्षां कमी असे कोणते दोन अंक घेऊन, त्यांची बेरीज सहज सांगतां येईल इतके जेव्हां वरचें कोष्टक पाठ होतील, तेव्हां भलते कोणते दोन अंक, एक नवांहून अधिक आणि दुसरा नवांहून कमी, असे घेऊन त्यांची मिळवणी आणि वजाबाकी करण्यांचा अभ्यास करावा. या पुढीलप्रमाणें पुष्कळ वाक्ये लिहावीं, तेणेंकरून मिळवणीचा आणि (२३) कलमांतील चिन्हे कामांत आणण्याचा अभ्यास होईल.

$$१२+६=१८$$

$$२२+६=२८$$

$$१९+८=२७$$

$$५४+९=६३$$

$$५६+७=६३$$

$$२२+८=३०$$

$$१००-९=९१$$

$$२७-८=१९$$

$$४४-६=३८$$
 इत्यादि.

३३. वर लिहिलेली दोन कलमें पुरतेपणीं मनांत ठसलीं, तर या

पुढील कृतीप्रमाणें, भलत्या कोणत्याहि अंकांची बेरीज करण्याचें सामर्थ्य येईल, ही रीति (२९) व्या कलमांत लिहिल्याप्रमाणें आहे.

**पहिली रीति.** अंकांस एकाखालीं एक मांड, असें कीं एकं खालीं एकं, आणि दहं खालीं दहं, इत्यादि येतील.

**दुसरी रीति.** सर्व अंकांचे एकं मिळीव, आणि असें केल्याने जो सर्व अंक होईल, त्याचे एकं आणि दहं असे दोन विभाग कर. जसें, जर तो अंक ८५ आढे, तर त्याचे ८ दहं आणि ५ एकं असे दोन विभाग कर; जर तो अंक १३६ असेल, तर त्याचे १३ दहं आणि ६ एकं असे विभाग कर, (२०) कलमाप्रमाणें.

**तिसरी रीति.** या आलेल्या अंकांचे एकं दुसऱ्या अंकांचे एकं खाली मांड, आणि दहंचा अंक ध्यानांत ठेव.

**चवथी रीति.** दहंचे ओळीतील सर्व अंकांची बेरीज घे, आणि तिसऱ्या रीतींत जे दहं ध्यानांत ठेवण्यास सांगितले, तेहिं खांशीं मिळीव, नंतर ह्या दहंचे बेरीजेचे दहं, आणि शतं, असे दोन विभाग कर. जसें, आलेले अंक ३३५ दहं असतील, तर त्यांचे ३३ शतं आणि ५ दहं असे दोन विभाग कर.

**पांचवी रीति.** दशकांचे आलेले अंक दशकांखालीं मांड, आणि शतंचे अंक ध्यानांत ठेव.

**साहाय्यी रीति.** प्रत्येक ओळीस असें करीत पुढें चाल, आणि शेवटील ओळीस आल्यावर, आलेल्या अंकांचे दोन भाग न करितां, त्यास दुसऱ्या सर्व अंकांचे पूर्वी मांड.

**उदाहरण.** या पुढील अंकांची बेरीज काय आहे ?

$$१८०५ + ३६ + १९७२७ + ३ + १४७४ + २००८$$

१८०५ एकंचे ओळीची बेरीज, अथवा ८ + ४ + ३ + ७ + ६  
३६ + ५; हे ३३ आहेत, ह्मणजे ३ दहं आणि ३ एकं आहेत.

१९७२७ ते ३ एकंचे स्थळीं मांड, आणि एकंचे बेरीजेपासून आ-  
लेले ३ दहं हातचे घेऊन, दहंचे ओळीची बेरीज घे-

१४७४ ह्मणजे, ३ + ० + ७ + २ + ३ + ०, हे १५ दशक आहे-

२००८ त; ह्मणजे १ शतं आणि ५ दशक आहेत. हे ५ दश-

२५०५३ काचे स्थळीं मांड, आणि दहंचे ओळीचे बेरीजेपासून आलेला १ शतं हातचा घेऊन, शतंचे ओळीची बेरीज घे; ह्मणजे,

१+०+४+७+८, हे बरोबर २० शत आहेत, अथवा २ सहस्र आणि ० शत आहेत. हे ० शतचे स्थळीं मांड, कां कीं तसें न केलें, तर दुसरा अंक सहस्राचा ठिकाणीं घेण्याचा तो न घेतां, शतचे ठिकाणीं घेतला जाईल, आणि शतचे ओळींचे बेरिजेपासून आलेले २ सहस्र हातचे घेऊन, सहस्राचे ओळींची बेरीज घे; ह्मणजे, २ + २ + १ + ९ + १, हे १५ सहस्र आहेत, अथवा १ दशसहस्र आणि ५ सहस्र आहेत. हे ५ सहस्रांचे ओळीं मांड, आणि सहस्राचे ओळींचे बेरिजेपासून आलेला १ दशसहस्र, हातचा घेऊन दशसहस्रांचे ओळींची बेरीज घे; ह्मणजे, १ + १, अथवा २ हे दशसहस्र आहेत. हे दोन, दशसहस्रांचे ओळींमांड, ह्मणजे कृति पुरी होईल.

३४. मिळवणीचा अभ्यासासाठीं, या पुढील कोष्टकाविषयी जी गोष्ट सांगतो, ती खरी आहे असें खात्रीस येईल. प्रत्येक आडव्या, किंवा उभ्या, किंवा कोण्यापासून कोण्यांतचे ओळींत जे अंक लिहिले आहेत, त्यांस एकत्र केले असतां, त्यांची बेरीज २४१५६ इतकी होईल.

२०१६	४२१२	१६५६	३८५२	१२९६	३४९२	९३६	३१३२	५७६	२७७२	२१६
२५२	२०५२	४२४८	१६९२	३८८८	१३३२	३५२८	९७२	३१६८	६१२	२४१२
२४४८	२८८	२०८८	४२८८	१७२८	३९२४	१३६८	३५३४	१००८	२८०८	६४८
६८४	२४८४	३२४	२१२४	४३२०	१७३४	३९६०	१४०४	३२०४	१०४४	२८४४
२८८०	७२०	२५२०	३६०	२१६०	४३५६	१८००	३६००	१४४०	३२४०	१०८०
१११६	२११६	७५६	२५५६	३९६	२१९६	३९९६	१८३६	३६३६	१४७६	३२७६
३३१२	११५२	२९५२	७२२	२५९२	३६	२२३२	४०३२	१८७२	३६७२	१५१२
१५४८	३३४८	११८८	२९८८	४३२	२६२८	७२	२२६८	४०६८	१९०८	३७०८
३७४४	१५८४	३३८४	८२८	३०२४	४६८	२६६४	१०८	२३०४	४१८४	१९४४
१९८०	३७८०	१२२४	३४२०	८६४	३०६०	५०४	२७००	१४४	२३४०	४१४०
४१७६	१६२०	३८१६	१२६०	३४५६	९००	३०९६	५४०	२७३६	१८०	२३७६

३५. जर भलते दोन अंक परस्पर मिळवायाचे असतील, आणि जर एकांतून काहीं भाग घेऊन, तितकाच भाग दुसऱ्याशी मिळवून, त्या दोहोंची बेरीज केली, तर त्या दोन अंकांचे बेरिजेमध्ये काहीं फेर पडणार नाही. जर दोन टोपल्यांत खड्यांचे समुदाय असले, आणि एकांतून कित्येक खडे काढून दुसरीत टाकले, तर दोन्ही टोपल्या मिळून खड्यांचे समुदायांत काहीं फेर पडणार नाही. जसे,  $१५ + ७$  आणि  $१२ + १०$  हे एकच आहेत, कां की  $१२$  हे  $१५$  पेक्षा  $३$  नीं कमी आहेत, आणि  $१०$  हे  $७$  पेक्षा  $३$  नीं अधिक आहेत. (२९) कलमांत जी कृति केली तिला आधार हें मूळ कारण आहे.

३६. (२४) कलमाप्रमाणें, दोन अंकांचे जागीं अ आणि ब घे. ते अंक काय आहेत, हें समजेपावेतों त्यांची बेरीज सांगण्यास अशक्य. परंतु सदाः तर त्यांची बेरीज दाखविण्यासाठीं  $अ + ब$  घे. अ आणि ब यांतून अला क मिळविला, आणि लागलाच वतून क वजा केला, तर बीजगणिताचे भाषेप्रमाणें, अ आणि ब यांचे बेरिजेंत काहीं फेर पडत नाही, असें ह्मटल्याने, हें पुढील समीकरण होतें;

$$(अ + क) + (ब - क) = अ + ब;$$

हें समीकरण कुंडलीवांचून या पुढीलप्रमाणें मांडतां येईल, जसें,

$$अ + क + ब - क = अ + ब.$$

कां की विचार केला असतां या दोन्ही समीकरणाचा अर्थ एकच आहे, असें दिसण्यांत येईल.

३७. जर दोन, तीन किंवा अधिक वेळा अ घेतला, तर त्यास बीजगणितांत  $२अ$ ,  $३अ$ ,  $४अ$  इत्यादि रूपाने मांडितात. या पदांतून कोणत्याही दोन पदांची बेरीज, त्यांचेमध्ये  $+$  हें चिन्ह मांडल्यापेक्षां ती अधिक संक्षेपरूपाने दाखवितां येईल; कां की अ कोणत्या अंकाचे स्थळीं घेतला आहे, तें जरी कळलें नाही, तरी तो कसाहि असल्याने,  $२अ + २अ = ४अ$ ,  $३अ + २अ = ५अ$ ,  $४अ + ९अ = १३अ$  असें होतें; आणि सामान्यतः जर म वेळा अ घेऊन, त्याशीं न वेळा अ मिळविला, तर उत्तर  $म + न$  वेळा अ घेतला असें होईल, अथवा

$$मअ + नअ = (म + न)अ.$$

३८. कुंडलीविषयीं येथें काहीं सांगितलें पाहिजे. तिचा अर्थ हाच, कीं तींत जी पद्धती असेल, तिचेजागीं एकच अक्षर आहे असें जाणून,

त्या एक अक्षराप्रमाणे ती पद्धती कामांत आणिली पाहिजे. जसें, पञ याचा अर्थ हाच कीं ५ वेळा अ घेतला आहे, आणि (म + न)अ याचा अर्थ हाच कीं म + न वेळा अ घेतला आहे. यामुळे (म + न)अ आणि म + न अ हीं दोन्हीं भिन्न आहेत, कां की म + नअ याचा अर्थ हाच कीं न वेळा अ घेऊन, नंतर त्याशीं म मिळविला आहे. जसें,  $(३+४) \times २$  हे  $७ \times २$  अथवा १४ आहेत; परंतु  $३+४ \times २$  हे  $३+८$ , अथवा ११ आहेत.

३९. एक अंक दुसऱ्यांतून वजा करून जो अंक राहतो, त्यास बाकी किंवा शेष ह्मणतात. बाकी काढण्याचे रितीस वजाबाकी ह्मणतात. जो अंक वजा करायाचा आहे, तो दोन अंकांतून अर्थात् लहान अंक आहे.

४०. वजाबाकीचे कृतीचा आश्रय या पुढील दोन मूळ कारणावर आहे.

पहिलें. दोन अंकांची वजाबाकी करायाची असेल, आणि पहिल्या अंकाला कांहीं अंक मिळवून, तितकाच जर दुसऱ्याशीं मिळविला; अथवा पहिल्या अंकांतून कांहीं अंक वजा करून, तितकाच जर दुसऱ्यांतून वजा केला, तर त्या दोन अंकांचे वजाबाकीमध्ये कांहीं फेर पडणार नाही. दोन टोपल्या खड्यांनीं भरलेल्या आहेत, आणि दुसरीपेक्षां पहिल्या टोपलींत शंभर खडे अधिक आहेत, अशी कल्पना कर. जर प्रत्येक टोपलीमध्ये ५० खडे अधिक टाकले, किंवा प्रत्येक टोपलींतून ५० खडे काढिले, तरी दुसऱ्या टोपलीपेक्षां पहिल्या टोपलींत १०० खडे अधिक होतील. यामुळे भलत्या दोन अंकांची वजाबाकी काढतेसमयी जर सोईस पडेल, तर दोनही अंकांस भलता कोणताहि अंक मिळवितां येईल, कां की, जरी असें केल्याने त्या अंकांत भेद होतो, तथापि त्यांचे वजाबाकीमध्ये कांहीं भेद होत नाही.

दुसरें. ६ हे ४ पेक्षां २ नीं अधिक आहेत,

आणि ३ हे २ पेक्षां १ ने अधिक आहेत,

आणि १२ हे ५ पेक्षां ७ नीं अधिक आहेत,

यामुळे ६, ३, आणि १२ हे सर्व, अथवा २१ हे, ४, २, आणि ५ हे सर्व, अथवा ११, यांपेक्षां २, १, आणि ७ हे सर्व, अथवा १०, इतक्यांनी अधिक आहेत; कोणत्याहि दुसऱ्या अंकाविषयी ही गोष्ट खरी आहे.

४१. अ, ब, आणि क, असे तीन अंक असतील, आणि जर ब पेक्षा अ मोठा नसेल, तर (४०) या कलमांतील पहिल्यामूळ कारणावरून पुढील प्रमाणे होतें.

$$(अ + क) - (ब + क) = अ - ब.$$

पुनः, अ आणि ब यांपेक्षां जर क कमी असेल, तर

$$(अ - क) - (ब - क) = अ - ब.$$

(११) कलमाप्रमाणे या उदाहरणांत कुंडली काढवत नाहीं. झणजे  $प - (क - र)$  आणि  $प - क - र$  हीं दोन्ही मारिखां नाहीत. कां की, पहिलीं ३, क आणि र यांची बाकी, पतून वजा केली आहे; परंतु दुसरीत पतून पहिल्याने क आणि दुसऱ्याने र असे वजा केले आहेत, झणून क आणि र अथवा  $क + र$ , वजा केले असतां वरचे सारिखेंच होतें. यामुळे  $प - क - र$  ही पद्धती  $प - (क + र)$  आहे.  $प - (क - र)$  यापासून कुंडली कशी काढावी कीं उत्तराचे किमतींत कांहीं फेर पडणार नाही, हे दाखवायासाठीं, पुढील सोपें उदाहरण घे, झणजे १२ - (८ - ५). जर १२ तून ८ वजा केले, किंवा १२ - ८, असें केलें तर अधिक वजा केले असें होईल; कां की केवळ ८ वजा करायाचे नाहीत, परंतु ८ हे ५ नीं कमी करून बाकी मात्र वजा करायाची आहे. यामुळे १२ - ८ असें केल्याने ५ अधिक वजा होतात. यामुळे त्यांत नीट करायासाठीं उत्तरास ५ मिळविले पाहिजेत, झणून, १२ - (८ - ५) यांची किंमत १२ - ८ + ५ आहे. सर्व पक्षांस ही तर्करीति लागू होये, आणि यामुळे हें पुढील प्रमाणे होतें.

$$प - (क + र) = प - क - र.$$

$$प - (क - र) = प - क + र.$$

तसेच तर्क रीतिने,

$$अ - (ब + क - ड - इ) = अ - ब - क + ड + इ.$$

$$२अ + ३ब - (अ - २ब) = २अ + ३ब - अ + २ब = अ + ५ब.$$

$$४क्ष + य - (१७क्ष - ९य) = ४क्ष + य - १७क्ष + ९य = १०य - १३क्ष.$$

४२. ५७७६२ आणि ३४६३१ या अंकांची वजाबाकी करण्याची इच्छा आहे. (२९) या कलमाप्रमाणे या संख्यांचे तुकडे कर ;

५७७६२ हे ५ दशसहस्र, ७ सहस्र, ७ शत, ६ दशक, २ एक आहेत.

३४६३१ हे ३ दशसहस्र, ४ सहस्र, ६ शत, ३ दशक, १ एक आहेत.

भातां २ एक हे १ एकपेक्षा १ एकने अधिक आहेत.

६ दशक हे ३ दशकांपेक्षा ३ दशकांनी अधिक आहेत.

७ शतक हे ६ शतकांपेक्षा १ शतकाने अधिक आहेत.

७ सहस्र हे ४ सहस्रांपेक्षा ३ सहस्रांनी अधिक आहेत.

५ दशसहस्र हे ३ दशसहस्रांपेक्षा २ दशसहस्रांनी अधिक आहेत.

यामुळे (४० कलमाचे दुसऱ्या मूळ कारणाप्रमाणे) पहिल्या ओळीचा सर्व अंकांची एकंदर, दुसऱ्या ओळीचे सर्व अंकांचे एकंदरीपेक्षा, तिसऱ्या ओळीचे सर्व अंकांचे एकंदरीने अधिक आहे, ह्मणजे याणीं

२ दशसहस्र, ३ सहस्र, १ शतक, ३ दशक आणि १ एक, ह्मणजे ते २३१३१ आहेत. यामुळे ५७७६२ आणि ३४६३१ यांची वजावाकी २३१३१ आहे, अथवा  $५७७६२ - ३४६३१ = २३१३१$ .

४३. अशी कल्पना कर, कीं ६१२७४ आणि ३९६२८ यांची वजावाकी करायाची आहे. हे दोन अंक विस्ताराने लिही, ह्मणजे

६१२७४ यांत ६ दशसहस्र, १ सहस्र, २ शतक, ७ दशक आणि ४ एक आहेत.

३९६२८ यांत ३ दशसहस्र, ९ सहस्र, ६ शतक, २ दशक आणि ८ एक आहेत.

वरचे कलमाप्रमाणे करून लागले, तर लागलीच अडचण पडती, कां कीं ८ हे, ४ पेक्षा अधिक आहेत, ह्मणून त्यांतून वजा होत नाही. परंतु (४०) व्या कलमावरून असे दिसते कीं जर दोन अंकांची वजावाकी करायाची असेल, आणि त्या दोहोंलाहि एकसारख्या अंक मिळविता, तर त्यांचे वजावाकीत फेर पडणार नाही. पहिल्या अंकास दहा मिळीव, ह्मणजे ४ एकचे जागीं १४ एक घे, आणि दुसऱ्या अंकाला दहा मिळीव, परंतु एक्या अंकाला दहा मिळविण्याचे जागीं, दहा या अंकाला एक मिळीव ह्मणजे सारखेच होईल. ह्मणजे ते दोन अंक या पुढीलप्रमाणे मांडले जातील.

६ दशसहस्र, १ सहस्र, २ शतक, ७ दशक आणि १४ एक.<sup>†</sup>

३ दशसहस्र, ९ सहस्र, ६ शतक, ३ दशक आणि ८ एक.

<sup>†</sup> या अंकास फिरविले आहे त्यास मोठ्या अक्षरांनी लिहिले आहे.



आतां पहाण्यांत येते कीं खालचे ओळीचे एक आणि दहं, वरचे ओळीचे एक आणि दहं यांतून वजा करितां येतील, परंतु खालचे ओळीचे शतक, वरचे ओळीचे शतकांतून वजा केले जात नाहींत. यासाठीं, त्या दोहों अंकांस एक सहस्र अथवा १० शतक मिळीव, ह्मणजे असें केल्याने त्यांचे वजाबाकींत कांहीं फेर पडणार नाहीं, आणि स्मरणांत ठेव कीं वरचे ओळीचे शतक १० नीं अधिक कर, आणि खालचे ओळीचे सहस्र, एक याने अधिक कर, ह्मणजे हे दोन सारखेच होतील. आणि खालचे ओळीचे सहस्र, वरचा ओळीचा सहस्रांत वजा होत नाहीं, यामुळे त्या दोहों अंकांस १ दशसहस्र अथवा १० सहस्र मिळीव, आणि वरचे ओळीचे सहस्रास १० नीं अधिक कर, आणि खालचे ओळीचे दशसहस्रास १ याने अधिक कर, ह्मणजे हे दोनीं सारखेच होतील; असें केल्याने शेवटीं जे अंक निघतात, ते या पुढीलप्रमाणे होतील,

६ दशसहस्र, ११ सहस्र, १२ शतक, ७ दशक, आणि १४ एक.

४ दशसहस्र, १० सहस्र, ६ शतक, ३ दशक, आणि ८ एक.

हे दोन अंक आणि या कलमाचे आरंभी सांगितले अंक सारखेच नाहींत खरे, परंतु (४०) कलमाप्रमाणें त्यांची वजाबाकी सारखीच आहे. (४२) कलमाचे रितीप्रमाणें या शेवटील सांगितल्या अंकांशीं कृति कर, ह्मणजे त्यांची वजाबाकी या पुढीलप्रमाणें निघेल,

२ दशसहस्र, १ सहस्र, ६ शतक, ४ दशक, आणि ६ एक आहेत, ह्मणजे हे २१६४६ आहेत.

४४. यावरून वजाबाकी करण्याचा ह्या पुढील रिती निघतात.

पहिली. जो अंक वजा करावयाचा आहे, त्यास दुसऱ्याचे खालीं असा मांड कीं, एकंखालीं एकं, दहंखालीं दहं, इत्यादि येतील.

दुसरी. जर खालचे ओळीचा प्रत्येक अंक, वरचे ओळीचे त्याच अंकांतून वजा करितां येतो तर कर. आणि जर तसें करितां येत नाहीं, तर वरचे अंकास दहा मिळवून, त्यांतून खालचा अंक वजा कर; परंतु स्मरण ठेव, कीं या पक्षांत त्यास वरचे ओळीचे अंकांतून वजा करण्याचे पूर्वी, खालचे ओळीचा जवळचा अंकास एकाने नेहमी वाढविला पाहिजे.

४५. जर खालचे ओळीचीं अंकस्थळे, वरचे ओळीचे अंकस्थळांचे बरोबर नसतील, तर तीं अंकस्थळे बरोबर होतील, इतकीं शून्ये खालचे

ओळीचे अंकांचा आरंभीं मांड. कोणत्याहि संख्येचे आरंभीं शून्ये मांडल्यानें त्यांत कांहीं फेर पडत नाही. उदाहरण, ००८१८ आणि ८१८ ह्या दोनहि संख्या सारख्याच आहेत, कां कीं त्यांतून पहिली-चा अर्थ हाच आहे,

० दशसहस्र, ० सहस्र, ८ शतक, १ दशक आणि ८ एकं;  
पहिले दोन अंक शून्य आहेत, आणि बाकी

८ शतक, १ दशक आणि ८ एकं, अथवा ८१८ आहेत.

या दोहोंतून दुसऱ्या अंकामध्ये सहस्र आणि दशसहस्र नाहीत, या ह्मणण्याशिवाय त्या दोहोंत दुसरा कांहीं फेर नाही, आणि त्यांत सहस्र आणि दशसहस्र नाहीत, हें सांगितल्यावांचून ध्यानांत येतें. कदाचित् कोणी असें विचारील, कीं शून्य अंकांचेमध्ये, किंवा त्यांचे उजव्ये बाजूस मांडिलें असतां, जसें २८००७ आणि ३९७००, यांस ही गोष्ट कां लागू होत नाही? परंतु स्मरणांत ठेविलें पाहिजे, कीं पहिल्या अंकांतील दोन शून्ये नसलीं तर, जे ८ आहेत ते ८ सहस्रांचे जागीं ८ दशक आहेत असें होईल; आणि दुसऱ्या अंकांत दोन शून्ये नसलीं, तर ७ आहेत ते ७ शतकांचे जागीं ७ एकं आहेत असें होईल.

४६.

उदाहरणें.

३७०८२९१६४००३०१७४ } यांची वजाबाकी काय !  
३०८१३६४९२७६१८८

३६७७४७७९९०७५३९८६ बाकी.

अभ्यासकरितां उदाहरणें.

पहिलें. १८३३७+१४९२६३२००-६४७२९०२ उत्तर काय आहे!

उत्तर १४२८०८६३५.

१०००-४६४+३२७९-६४६ उत्तर काय आहे! उत्तर ३१६९.

दुसरें. ३३-२+१०००३७ यांतून ६४+७६+१४४-१८ हे वजा कर.

उत्तर ९९८०२.

तिसरें. जर उदाहरणांतील वरचे ओळींतल्या डाव्येकडील पहिल्या स्थळाशिवाय बाकीचे सर्व अंकस्थळीं शून्ये असतील, ह्मणजे ही पुढील वजाबाकी करायाची आहे, तर वजाबाकी करायाकरितां कोणती अधिक संक्षेप रीति आहे!

१००००००० - २७३१६३४.

अवधे. १८३६२+२४६९ आणि १८३६२-२४६९, यांची कि-  
मत काढ, दुसरें उत्तर पहिल्या उत्तराशीं मिळीव, नंतर खांतून १८३६२  
वजा कर; पुनः पहिल्या उत्तरांतून दुसरें उत्तर वजा कर, नंतर खां-  
तून २४६९ वजा कर. उत्तर १८३६२ आणि २४६९.

पांचवें. अ, ब, क, आणि ड, या क्रमाने एकत्र ओळींत चार स्थळे  
आहेत. अपासून डपावेजो १४६३ मैल; अपासून कपावेजो ७२८ मैल;  
आणि बपासून ड पावेजो १३१७ मैल आहेत. तर अपासून ब पा-  
वेजो, बपासून कपावेजो, आणि कपासून डपर्यंत हीं वेगवेगळ्यां  
अंतरें किती किती आहेत?

उत्तर अपासून बपावेजो १४६, बपासून कपावेजो ५८२, आणि  
कपासून डपर्यंत ७३५ मैल अंतर आहे.

साहायें. या पुढील कोष्टकांत अतून ब वजा कर, आणि त्या ना-  
कींतून ब पुनः वजा कर, आणि याप्रमाणें पुढें पुनः पुनः ब वेगळ्यावे-  
गळ्या बाकींतून, जोंपर्यंत वजा केला जात नाही तोपर्यंत कर. अ पा-  
सून ब किती वेळा वजा केला जातो, आणि शेवटील बाकी काय आहे  
हें काढ.

अ	ब	वेळांक	बाकी
२३६०४	९९९९	२	३६०६
२०९९६१	३७१७३	५	२४०९६
७४७१२	६७९२	११	०
४८०२४६९	६५४३२१	७	२२२२२२
१८८४९७४७	३१४१५९२	६	१९५
९८७६५४३२१	१२३४५६७८९	८	९

## तिसरा भाग.

### गुणाकार.

४७. अंकगणितांतील सर्व प्रश्नांस मिळवणी आणि वजावाकी लागती, याशिवाय दुसरे कांहीं लागत नाहीं असे वर सांगितले आहे. तथापि मागील भागांत जा रिती सांगितल्या आहेत, यांशिवाय कोणत्याहि दुसऱ्या रिती कधींहि कामांत आणू नये, असे सांगण्याचा अभिप्राय नाहीं, परंतु मागील रितींपासून जे फळ उत्पन्न होतें, तेच फळ संक्षेप रितीने काढण्याचा मार्ग दुसऱ्या रिती दाखवितात असा अभिप्राय आहे. आणि अशा कल्पनेप्रमाणें जे कांहीं खड्यांनी किंवा चकऱ्यांनी होतें, तेच करण्याचा संक्षिप्त आणि सोपा मार्ग दाखविणाऱ्या केवळ वरचा दोन रिती आहेत.

४८. पांच सत्रांची बेरीज जाणाऱ्याची इच्छा आहे, अथवा हा पुढील प्रश्न करितों कीं, खड्यांचा पांच राशी आहेत, आणि प्रत्येक राशींत सत्रा खडे आहेत; तेव्हां ते सर्व मिळून किती आहेत? एकाखाली एक असे सत्रा पांच वेळा मांड आणि बेरीज घे, एणेंकरून ८५ होतात.

१७ या पक्षांत ८५ यांस ५ आणि १७ यांचा गुणाकार ह्मणतात,  
१७ आणि हा गुणाकार करण्याचे कृतीलाहि गुणाकार ह्मणतात,  
१७ यापासून तर भलत्या कांहीं सारख्या परिमाणांची बेरीज नि-  
१७ घेती दुसरे कांहीं होत नाहीं. या उदाहरणांत १७ यांस  
१७ गुण्य ह्मणतात, आणि ५ यांस गुणक ह्मणतात.

८५

४९. यापेक्षां जर अवघड प्रश्न नसते, तर वर केलेल्या रितीपेक्षां दुसऱ्या कांहीं संक्षेप रितीचें प्रयोजन पडलें नसतें. परंतु जर खड्यांचा १३६७ राशी असतील, आणि प्रत्येक राशींत ४२९ खडे असतील, तर त्यांची एकंदर संख्या ४२९ यांचा १३६७ वेळा आहे, अथवा ४२९ गुणिले १३६७ इतक्याबरोबर आहे. वरचे रितीप्रमाणें केलें असतां ४२९ यांस एकाखाली एक १३६७ वेळा मांडावे लागतील, आणि नंतर मोठी लांब मिळवणी करावी लागेल. ही खटपट चुकवा-यासाठीं त्यापेक्षां संक्षेप रिती अगत्य असावी, ती रिती आतां पुढे सांगतो.

५०. या पुढील कोष्टकावरून,† १० वेळा १० एथपावेतों तरी सर्व अंकांचे गुणाकारांशी शिकणारानें पहिल्यानें माहित व्हावें, आणि तो कोष्टक त्याणें पाठ करावा.

१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२
२	४	६	८	१०	१२	१४	१६	१८	२०	२२	२४
३	६	९	१२	१५	१८	२१	२४	२७	३०	३३	३६
४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६	४०	४४	४८
५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५	५०	५५	६०
६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४	६०	६६	७२
७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६३	७०	७७	८४
८	१६	२४	३२	४०	४८	५६	६४	७२	८०	८८	९६
९	१८	२७	३६	४५	५४	६३	७२	८१	९०	९९	१०८
१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००	११०	१२०
११	२२	३३	४४	५५	६६	७७	८८	९९	११०	१२१	१३२
१२	२४	३६	४८	६०	७२	८४	९६	१०८	१२०	१३२	१४४

७ वेळा ६ हे किती होतात, हें जर या कोष्टकांतून जाणयाची इच्छा असेल, तर त्यांतून कोणताहि अंक, जसे ६ हा डाव्येकडचे पहिल्ये

† १ पासून १२ अंकपावेतों फाळे बहुतकरून पाठ करण्याची चाल आहे; यास्तव वर-चा कोष्टक १२ वेळ १२ पर्यंत राखिला आहे.

उभ्ये ओळींत पहा ; त्यापासून उजव्येकडेस जा उभ्ये ओळीचे डोक्यावर ७ हा अंक आहे तेथें थांब, त्या जागीं ४२ हा अंक सांपडतो, आणि तो ७ आणि ६ यांचा गुणाकार आहे.

५१. ६ वेळा ७, अथवा ७ वेळा ६, यांतून कोणताहि पक्ष या रितीनें करितां येईल, आणि या दोहोंपक्षां उत्तर ४२ येईल. ह्मणजे, सहा सात आणि सात सहा यांचा गुणाकार सारखाच आहे. हें या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येतें ; सात खडे एका आडव्ये ओळींत मांड, आणि तशाच एकाखालीं एक अशा सर्व मिलून सहा ओळी मांड. वरपासून खालीं पावेतो सर्व ओळी मोजिल्या, तर सर्वांत खड्यांची संख्या ६ वेळा ७, किंवा सहा सात आहेत ; परंतु बाजूकडून ओळी मोजिल्या, तर असें दिसतें कीं सात ओळी आहेत, आणि प्रत्येक ओळींत सहा आहेत, ह्मणून सर्वांत खड्यांची संख्या ७ वेळा ६ अथवा सात सहा आहेत. आणि या दोहोंतून कशेहि तऱ्हेनें मोजिल्या, तरी सर्व संख्या ४२ होती. हीच रीति भलये कोणयेहि दोन अंकांस लावितां येईल. (२३) कलमांतील चिन्हे कामांत आणिलीं, तर असें ह्मणावें लागेल कीं  $७ \times ६ = ६ \times ७$ .

५२. जर भलतें कांहीं परिमाण कांहीवेळा घेणें असेल, तर त्या परिमाणाचा प्रत्येक भाग तितक्ये वेळा घेतल्यानें कार्य होईल. जसें धान्याचा एका पोत्यांतील प्रत्येक मणाचा ठिकाणीं पन्नास मण याप्रमाणें भरले असतां, तें सर्व धान्य पन्नासपट वाढेल. कोणयेहि मुलुखांतील प्रत्येक बिघा, किंवा प्रत्येक परगणा दुप्पट केला असतां, तो मुलुख दुप्पट होईल. जरी ही गोष्ट सरळ दिसत्ये, तरी ती सांगितली पाहिजे, कां कीं ही गोष्ट गुणाकाराचे रितीचा आश्रयरूप मूळकारणांतून एक कारण आहे.

५३. कोणत्याहि अंकानें गुणायचें असेल, तर त्या अंकाचे हवे तेवढे भाग करून, त्या प्रत्येक भागाने वेगवेगळे गुणून, त्या गुणाकारांची बेरीज घ्यावी. उदाहरण, ४ आणि २ मिळून ६ होतात. तर ७ यांस ६नीं गुणायसार्थी, पहिल्याने ७ यांस ४ नीं गुण, नंतर ७ यांस २ नीं गुण, त्या दोन गुणाकारांची बेरीज घे, ह्मणजे इच्छिला गुणाकार होईल. असें केल्याने ४२ होतात, तो ७ आणि ६ यांचा गुणाकार आहे. पुनः,

३२ आणि २५ मिळून ५७ होतात, ह्मणून ५७ वेळा ५० हे ३२ वेळा ५०, आणि २५ वेळा ५०, या दोन गुणाकारांचे बेरिजेबरोबर आहेत, आणि याप्रमाणे पुढेही. जर चिन्हे कामांत आणिलीं, तर वरचीं दोन उदाहरणे या पुढीलप्रमाणे मांडितां येतील ;

$$७ \times ६ = ७ \times ४ + ७ \times २.$$

$$५० \times ५७ = ५० \times ३२ + ५० \times २५.$$

५४. मागील दोन कलमांचीं मूळ कारणे या पुढीलप्रमाणे दाखवितां येतील ; जर, क्ष, य, आणि ज्ञ हे मिळून अचे बरोबर असतील, तर मक्ष, मय, आणि मज्ञ, मिळून मअचे बरोबर होतील ; अथवा,

$$\text{जर } अ = क्ष + य + ज्ञ.$$

$$\text{तर } मअ = मक्ष + मय + मज्ञ.$$

$$\text{अथवा, } म(क्ष + य + ज्ञ) = मक्ष + मय + मज्ञ.$$

क्ष, य, आणि ज्ञ हे मिळून अ होतो त्याबद्दल, जर क्ष + य - ज्ञ, क्ष - य + ज्ञ, क्ष - य - ज्ञ, इत्यादि अशा कित्येक मिळवण्या आणि वजाबाक्या मिळून जर अ होईल, तर वरप्रमाणे फळ उत्पन्न होईल. यांतून पहिली रकम घे ; ह्मणजे,

$$\text{जर } अ = क्ष + य - ज्ञ.$$

$$\text{तर } अम = मक्ष + मय - मज्ञ.$$

कां, जर अ हा क्ष + य यांचे बरोबर असला, तर मअ हा मक्ष + मय यांचे बरोबर होईल. परंतु क्ष + य यांत ज्ञ कमी इतका अ आहे, ह्मणून जितक्या वेळा क्ष + य घेतला, तितक्याच वेळा ज्ञ अधिक घेतला आहे ; ह्मणजे, मज्ञ अधिक घेतला आहे ; यामुळे, मअ हा मक्ष + मय नव्हे, परंतु मअ हा मक्ष + मय - मज्ञ आहे. या जातीचा तर्क दुसऱ्या पक्षांसहि लागू होईल, आणि त्यापासून हीं पुढील फळे निघतील ;

$$म(अ + ब + क - ड) = मअ + मब + मक - मड.$$

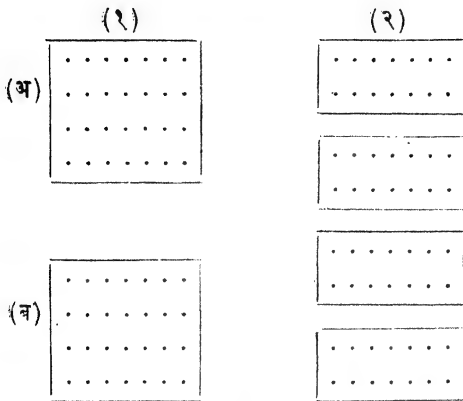
$$अ(अ - ब) = अअ - अब. \quad ७अ(७ + २ब) = ४९अ + १४अब.$$

$$ब(अ - ब) = बअ - बब. \quad (अअ + अ + १)अ = अअअ + अअ + अ.$$

$$३(२अ - ४ब) = ६अ - १२ब. \quad (३अब - २क)४अबक = \begin{cases} १२अअबक \\ - ८अबकक. \end{cases}$$

५५. कोणत्याहि दोन अंकांचा गुणाकार करण्याची आणखी एक रिती आहे. ४ वेळा २ ह्मणजे ८ होतात, ह्मणून ७ वेळा ८ किती

होतात, हें जाणायासाठी ७ यांस ४ नीं गुणून, तो गुणाकार २ नीं गुणिला असतां उत्तर येईल. हें दाखवायासाठी, खालचे (१) आणि (२) आकृतीप्रमाणें ७ खडे एक आडव्ये ओळींत मांड, आणि एका-खालीं एक अशा आठ ओळी मांड.



सर्व मिळून खड्यांची संख्या ८ वेळा ७, किंवा ५६ आहे. परंतु (पहिल्ये आकृतीप्रमाणें) प्रत्येक चार ओळीभोंवतीं एक काटकोनचौकोन कर, जसें (अ) आणि (ब). प्रत्येक काटकोनचौकोनांतल संख्या ४ वेळा ७, किंवा २८ आहे, आणि तसे दोन काटकोनचौकोन आहेत; यामुळे, सर्व मिळून खड्यांची संख्या २८ चे दुप्पट आहे, अथवा  $२८ \times २$ , अथवा, ७ पहिल्याने ४ नीं गुणून, नंतर तो गुणाकार २ नीं गुणिला इतकी आहे. ७ यांस ८ यांणीं गुणणें, आणि ७ यांस पहिल्याने २ नीं गुणून, नंतर ४ नीं गुणणें हीं दोन्ही एकच आहेत, असें दुसऱ्ये आकृतींत दाखविलें आहे. हीच रीति दुसऱ्या अंकांस लागू होईल. जसें, ८० ह्यणजे ८ वेळा १० आहेत, तर २५६ वेळा ८० हे किती होतात हें समजण्यासाठी, पहिल्याने २५६ यांस ८ नीं गुण, नंतर तो गुणाकार १० नीं गुणावा, ह्यणजे, इच्छिलेला गुणाकार होईल. चिन्हें कामांत आणिलीं असतां, वरचीं उदाहरणें या पुढीलप्रमाणें मांडिलीं जातील;



$$७ \times ८ = ७ \times ४ \times २ = ७ \times २ \times ४$$

$$२५६ \times ८० = २५६ \times ८ \times १० = २५६ \times १० \times ८.$$

अभ्यासाकरिता उदाहरणें.

$$२ \times ३ \times ४ \times ५ = २ \times ४ \times ३ \times ५ = ५ \times ४ \times २ \times ३ \text{ इत्यादि हें दाखीव.}$$

$$१८ \times १०० = १८ \times ५७ + १८ \times ४३ \text{ हें दाखीव.}$$

५६. अब याचा अर्थ अ हा ब वेळा घेतला असा आहे, आणि अबक याचा अर्थ अ, ब वेळा घेऊन तो गुणाकार क वेळा घेतला असा आहे; असें समजून (५१) आणि (५५) कलमें या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येतील.

$$\text{अब} = \text{बअ}.$$

$$\text{अबक} = \text{अकब} = \text{बकअ} = \text{बअक}, \text{ इत्यादि.}$$

$$\text{अबक} = \text{अ} \times (\text{बक}) = \text{ब} \times (\text{कअ}) = \text{क} \times (\text{अब}).$$

अला ब, क, आणि ड, यांणीं एकामागें एक गुणिलें असतां, अथवा अला बकड यांणीं एकदांच गुणिलें असतां सारखाच गुणाकार होतो असें जर ह्मटलें, तर या पुढीलप्रमाणें लिहिलें पाहिजे ;

$$\text{अ} \times \text{ब} \times \text{क} \times \text{ड} = \text{अ} \times \text{बकड}.$$

सारांश कीं जर कांहीं अंक परस्पर गुणयाचे असतील, तर त्यांतील दोन किंवा अधिक अंकांचे गुणाकार करून, ते गुणाकार त्या अंकांचे जागीं मांडितां येतील ; जसें,

अबकडइफ हा गुणाकार, हीं पुढील पदें परस्पर गुणिल्यानें होतो,

अब	कडइ	फ
अबफ	डइ	क
अबक	डइफ	इत्यादि.

५७. १० नीं गुणयाचें असेल, तर गुण्याचे उजव्ये बाजूस एक शून्य मांडावें. जसें, १० वेळा २३५६ हे २३५६० होतात. हें दाखवायासाठीं, २३५६ ही संख्या विस्तारानें मांड, जसें,

२ हजार, ३ शतक, ५ दशक, आणि ६ एक.

हे प्रत्येक भाग १० वेळा घे, तर (५२) व्या कलमाप्रमाणें सर्व संख्येस १० नीं गुणणें इतक्याबरोबर होईल, नंतर याप्रमाणें होईल.

हजाराचे २ दशक, शतकाचे ३ दशक, दशकाचे ५ दशक, आणि एकमाचे ६ दशक.

हे तर २ दहाहजार, ३ हजार, ५ शतक, आणि ६ दशक आहेत. हे याप्रमाणे लिहिले पाहिजे, छणजे, २३५६०, कां की ६ हे ६ एक नाहीत, परंतु ६ दशक आहेत, यामुळे  $२३५६ \times १० = २३५६०$  आहेत.

१०० यांणीं गुणायाचे असेल, तर गुण्याचे उजव्ये बाजूस दोन शून्ये मांडावीं; १००० यांणीं गुणायाचे असेल, तर गुण्याचे उजव्ये बाजूस तीन शून्ये मांडावीं, आणि याप्रमाणे पुढेहि. ही रीति खरी आहे असें वरचे रितोप्रमाणे दाखवितां येईल. या पुढील कोष्टकावरून ही रीति सहज ध्यानांत येईल.

$१३ \times १० = १३०$	$१४२ \times १००० = १४२०००$
$१३ \times १०० = १३००$	$२३७०० \times १० = २३७०००$
$१३ \times १००० = १३०००$	$३०४० \times १००० = ३०४००००$
$१३ \times १०००० = १३००००$	$\left\{ \begin{array}{l} १०००० \times १००००० \\ = १००००००००० \end{array} \right.$

५८. २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, अथवा ९ यांतून कोणत्याहि एक अंकाने गुणायाची रीति दाखवितों. यांत १ हा अंक घेतला नाही, कां की १ ने गुणणे, अथवा कांहीं एक संख्या १ वेळा घेणे, यापासून ती संख्या नुसती लिहावी असा अर्थ होतो. १३६८ यांस ८ नीं गुणायाचे आहे. पहिली संख्या विस्ताराने याप्रमाणे मांड.

१ हजार, ३ शतक, ६ दशक, आणि ८ एक.

यांस ८ नीं गुणायासाठी, (५०) आणि (५२) प्रमाणे या वेगळ्या भागांस ८ नीं गुण, तर याप्रमाणे होईल,

८ हजार, २४ शतक, ४८ दशक, आणि ६४ एक.

आतां ६४ एक याप्रमाणे लिहितात.....६४

४८ दशक.....४८०

२४ शतक.....२४००

८ हजार.....८०००

यांची बेरीज घे, छणजे ती १०९४४ आहे, ही १३६८ आणि ८ यांचा गुणाकार आहे, अथवा  $१३६८ \times ८ = १०९४४$  आहे. याप्रमाणे कांहीं थोडी उदाहरणे केली असतां ही पुढील रीति ध्यानांत येईल.

५९. पहिल्याने. गुण्याचे उजव्येकडील पहिल्या अंकास गुण-

कानें गुण, आणि त्या गुणाकारांतील एकंचा अंक खाली मांडून त्याचे दशक हातचे घे.

**दुसऱ्यानें.** गुण्याचा दुसऱ्या अंकास पूर्वीप्रमाणें गुण, आणि त्या गुणाकारांत पहिले हातचे दशक मिळीव; यांतील एकंचा अंक खाली मांडून त्याचे दशक हातचे घे.

**तिसऱ्यानें.** याप्रमाणें शेवटचा अंकापर्यंत कर, आणि नंतर त्या अंकापासून जो गुणाकार येईल तो सगळा खाली मांड.

**चवथ्यानें.** जर गुण्यांत एकादें शून्य असलें, तर  $० \times १ = ०, ० \times २ = ०$ , इत्यादि असें होतें हें लक्षांत धरून, त्याशीं अंकाप्रमाणें कृति कर.

६०. याच रितीनें जा अंकास शून्यें जोडिलेलीं असतात, जसें ८०००, त्याणें कोणताहि अंक गुणितां येईल. कां कीं ८००० हे  $८ \times १०००$  इतक्याबरोबर आहेत, आणि यामुळें (५५) प्रमाणें पहिल्यानें ८ नीं गुणून नंतर १००० नें गुणावें, हजारांनें गुण्याची कृति (५७) प्रमाणें अंकाचे उजव्ये कडेस ३ शून्यें जोडिल्यानें पुरी होय. यावरून या पक्षाची रीति पुढील आहे, नुसत्या अंकानें गुणून, त्या अंकावर जितकी शून्यें असतात, तीं त्या गुणाकाराचे उजव्ये बाजूस मांड.

उदाहरण.

१६७९४२३८००८७२ यांस

६०००० यांणी गुण.

१००७६५४२८०५२३२००००

६१. अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१००७३६०५७ हे किती होतात? उत्तर. ७०५१५२०.

१२३४५६७८९५९+१० आणि १२३५९+४ हे किती होतात?

उत्तर. ११११११११११ आणि ११११.

१३६५३ + १२९५४ + १४७५८ + २७३०००

उत्तर. ८३१००.

एक लश्करांमध्ये पायदळांचीं ३३ पळटणें आहेत, आणि प्रत्येक पळटणांत ८०० मनुष्ये आहेत; स्वारांचीं १४ पळटणें आहेत, त्या प्रत्येक पळटणांत ६०० मनुष्ये आहेत; आणि गोलंदाजांचीं २ पळटणें आहेत, आणि प्रत्येकांत ३०० मनुष्ये आहेत. शत्रूपाशीं पायदळांचीं ६ पळटणें अधिक आहेत, आणि त्या प्रत्येक पळटणामध्ये १०० मनुष्ये

अधिक आहेत; त्यापाशीं स्वारांचीं ३ पळटणें अधिक आहेत, परंतु प्रत्येकांत १०० मनुष्ये कमि आहेत; आणि त्यापाशीं गोलंदाजांचीं ४ पळटणें आहेत, त्या प्रत्येकांतील मनुष्यांची संख्या वरचे गोलंदाजांचे पळटणाप्रमाणेंच आहे. पहिले लश्करांतून स्वारांचीं दोन आणि पायदळांचें एक पळटण शत्रूकडे पळून जातात. तर शत्रूचे लश्करांत पहिल्येपेक्षां किती मनुष्ये अधिक होतील ? उत्तर. १३४००.

६२. मनांत आण कीं २३७०७ यांस ४५६७ यांणीं गुणायचें आहे. आतां (५८) प्रमाणें ४५६७ हे ४०००, ५००, ६०, आणि ७ या वेगवेगळ्या संख्यांचे वेरजेबरोबर आहेत, तर २३७०७ यांस त्या प्रत्येकानें गुणून, त्या वेगळ्या गुणाकारांची वेरीज घ्यावी.

आतां (५८) प्रमाणें	२३७०७ ×	७ =	१६५९४९
(६०) प्रमाणें	२३७०७ ×	६० =	१४२२४२०
	२३७०७ ×	५०० =	११८५३५००
	२३७०७ ×	४००० =	९४८२८०००
	यांची वेरीज = १०८२६९८६९		

हा इच्छिलेला गुणाकार आहे.

प्रत्येक ओळीचा शेवटीं जीं शून्ये मांडिलीं असतात त्यांत सोडून, ओळींतील बाकीचे अंक त्यांचे त्यांचे जागीं मांडले असनाहि चालेल. शून्ये सोडल्यानंतर, दुसऱ्ये ओळीचे उजव्येकडील पहिला अंक, पहिल्या ओळीचे उजव्येकडील पहिल्या अंकाचे एक स्थळ डाव्येकडे येतो, तिसरे ओळीचा उजव्येकडील पहिला अंक, दुसऱ्ये ओळीचे उजव्येकडील पहिल्या अंकाचे एक स्थळ डाव्येकडे येतो, आणि याप्रमाणें पुढेहि. वरचा गुणाकाराचे ओळींचा डोक्यावर गुण्य गुणक मांडून, गुणाकाराची कृति या पुढीलप्रमाणें होईल.

२३७०७	६३. जेव्हां गुणकांत मध्ये कोठे तरीं शून्य
४५६७	येतें, असा एक अधिक पक्ष दाखवायाचा राहिला
१६५९४९	आहे. जा जा अंकानें गुणावपाचें, त्या अंका-
१४२२४२	चा गुणाकाराचा पहिला अंक त्याच गुणका-
११८५३५	काचे खालीं यावा, इतकें मात्र यापक्षांत केलें
९४८२८	पाहिजे, असें पुढील उदाहरणावरून दिसेल.
१०८२६९८६९	मनांत आण कीं, ३६५ यांस १०१००१ यांणीं

गुणायाचें आहे. यांत १०००००, १०००, आणि १, यांची बेरीज वर सांगितलेल्या गुणकाबरोबर आहे. तर पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें कृति कर; ह्मणजे,

$$\begin{array}{rcl} ३६५ \times १ & = & ३६५ \\ (५७) \text{ प्रमाणें } ३६५ \times १००० & = & ३६५००० \\ ३६५ \times १००००० & = & ३६५००००० \\ \hline \text{यांची बेरीज} & = & ३६८६५३६५ \end{array}$$

या उदाहरणांत शून्यें सोडून गुणाकार कृति याप्रमाणें होईल;

$$\begin{array}{rcl} ३६५ & ६४. \text{ सर्व पक्षांत गुणाकाराची रीति } \\ १०१००१ & \text{ यापुढीलप्रमाणें आहे. } \\ \hline ३६५ & \text{ पहिल्यानें. गुण्य आणि गुणक असे } \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} ३६५ & \text{ मांड, कीं एकाचा एकचा स्थळींचा अंक } \\ ३६५ & \text{ दुसऱ्याचा एकखांली, दहंचा स्थळींचा अंक } \\ \hline ३६८६५३६५ & \text{ दुसऱ्याचा दहंखांली, इत्यादि येतील. } \end{array}$$

**दुसऱ्यानें.** (५९) प्रमाणें सर्व गुण्य, गुणकाचे प्रत्येक अंकानें क्रमानें गुण, आणि अशा प्रत्येक गुणाकाराचा एकचा स्थळींचा अंक त्याच गुणक अंकाखालीं मांड.

**तिसऱ्यानें.** वेगळाले गुणाकार जे दुसऱ्यानें झाले त्यांची बेरीज घे.

६५. जेव्हां गुण्याचा, किंवा गुणकाचा, किंवा दोहोंचे उजव्येकडेस शून्यें असतात, तेव्हां शून्यावांचून गुणाकार कृति कर, नंतर त्या गुणाकाराचे उजव्येबाजूस गुण्यगुणक या दोहोंत जितकीं शून्यें आहेत तितकीं मांड. उदाहरण,  $३२०० \times १३०००$  किती होतात? आतां,  $३२००$  हे  $३२ \times १००$  आहेत, अथवा  $३२$  चे  $१००$  पटी बरोबर. पुनः,  $३२ \times १३०००$  हे  $३२ \times १३$  आणि त्यावर  $३$  शून्यें मांडिलीं इतके आहेत, ह्मणजे  $४१६$  आणि त्यांचे उजव्येकडे  $३$  शून्यें, अथवा  $४१६०००$  आहेत. परंतु इच्छिलेला गुणाकार यापेक्षां  $१००$  पट अधिक असावा, ह्मणून त्यावर आणखी दोन शून्यें मांडिलीं पाहिजेत. यावरून  $४१६०००००$  हा इच्छिलेला गुणाकार आहे, ह्मणून जितकीं गुण्य आणि गुणकांत शून्यें आहेत तितकीं यांत आहेत.

६६. कांहीं अंक त्याणें तोच वारंवार गुणिला असतां, गुणाकाराला त्या अंकाचा घात ह्मणतात. जसें;

६ यांस ६ चा पहिला घात क्षणतात.

६×६ यांस . . . . दुसरा घात क्षणतात.

६×६×६ . . . . . तिसरा घात क्ष०

६×६×६×६ . . . . . चवथा घात क्ष०

इत्यादि.

इत्यादि.

दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घातास बहुतकरून वर्ग आणि घन क्षणतात ; भूमितींतील चौरस आणि घनयांशीं दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घाताचा संबंध आहे, यासाठीं हे दोन शब्द कामांत आणिले आहेत ; परंतु हीं नामें केवळ शुद्ध नाहींत. गुणाकाराचा अभ्यासासाठीं, हे पुढील घात कर.

सांगितलेल्या संख्या.

वर्ग.

घन.

९७२

९४४७८४

९१८३३००४८

१००८

१०१६०६४

१०२४१९२५१२

३१४२

९८७२१६४

३१०१८३३९२८८

३१६३

१०००४५६९

३१६४४४५१७४७

५५५५

३०८५८०२५

१७१४१६३२८८७५

६७८९

४६०९०५२१

३१२९०८५४७०६९

३६ यांचा पंचघात. . . . . ६०४६६१७६ आहे.

५० यांचा चतुर्घात. . . . . ६२५००००—

१०८ यांचा चतुर्घात. . . . . १३६०४८८९६—

२७७ यांचा चतुर्घात. . . . . ५८८७३३९४४१—

६७. अ + व यांस क + ड यांणी गुणयाचें आहे, क्षणजे क + ड यांत जितके एक आहेत, तितक्या वेळा अ + व घेण्याचे आहेत. परंतु (५३) प्रमाणें अ + व हे क वेळा आणि ड वेळा घेण्याचे आहेत, अथवा इच्छिला गुणाकार (अ + व)क + (अ + व)ड आहे. परंतु (५२) प्रमाणें (अ + व)क हा अक + वक आहे, आणि (अ + व)ड हा अड + वड आहे ; यावरून इच्छिलेला गुणाकार अक + वक + अड + वड आहे ; अथवा,

$$(अ+व)(क+ड) = अक+वक+अड+वड.$$

अशेच रितीनें (अ-व)(क+ड) हे (अ-व)क+(अ-व)ड; अथवा,

$$(अ-व)(क+ड) = अक-वक+अड-वड.$$

अ-व यांसक-ड यांणीं गुणायांचे असेल, तर पहिल्याने (अ-व) हे क वेळा घे, ह्मणजे अक-वक होतील. हें खरें नाहीं, कां कीं अ-व हे क-ड वेळा न घेतां क वेळा मात्र घेतले, तेव्हां ड वेळा अधिक घेतले गेले; अथवा (अ-व)ड इतक्याने गुणाकार अधिक झाला. यामुळे, अक-वक-(अ-व)ड हें खरें उत्तर आहे. परंतु (अ-व)ड हे अड-वड, यामुळे,

$$(अ-व)(क-ड) = अक-वक-(अड-वड)$$

अथवा (४१) प्रमाणें = अक-वक-अड+वड

या मागील तीन उदाहरणांपासून बीजगणित परिमाणांचा गुणाकार करायची ही पुढील रीति निघते; गुण्यांचे प्रत्येक पद गुणकाचे प्रत्येक पदानें गुण; जेव्हां दोनीहि पदांस+, किंवा-आहे, तेव्हां त्यांचे गुणाकाराचे पूर्वी+मांड; जेव्हां एक पदास+आणि दुसऱ्याला-आहे, तेव्हां त्यांचे गुणाकारापूर्वी-मांड; आरंभीचे पदास कांहीं चिन्ह नसलें, तर+हें चिन्ह आहे असें जाणून कृति कर.

६८. उदाहरण, (अ+व)(अ+व) यांचा गुणाकार अअ+अव+अव+वव आहे. परंतु अव+अव हे २अव आहेत; यावरून अ+व यांचा वर्ग अअ+२अव+वव आहे; पुनः, (अ-व)(अ-व) यांचा गुणाकार अअ-अव-अव+वव. परंतु अव ची दोन वेळा वजावाकी, २अव चे वजावाकी बरोबर; यावरून अ-व यांचा वर्ग अअ-२अव+वव आहे. पुनः, (अ+व)(अ-व) यांचा गुणाकार अअ+अव-अव-वव आहे. परंतु अव मिळविल्याने आणि वजा केल्याने कांहीं अंतर पडत नाहीं; यावरून अ+व आणि अ-व यांचा गुणाकार अअ-वव आहे.

पुनः अ+व+क+ड यांचा वर्ग, अथवा (अ+व+क+ड)(अ+व+क+ड) हा गुणाकार, अअ+२अव+२अक+२अड+वव+२वक+२वड+कक+२कड+डड आहे; अथवा अशा परिमाणांचा वर्ग करण्याची रीति ही पुढील आहे; डाव्येकडचा पहिल्या पदाचा वर्ग कर, आणि त्या पदाचे उजव्येकडील वेगळ्या सर्वा पदांस त्या पहिल्या पदाचे दुपटीने गुण; दुसऱ्या पदानें तसेंच कर, आणि याप्रमाणें शेवटचा पदापावेतो कर.

## चवथा भाग.

### भागाकार.

६९. १५६ हे कांहीं एक भागांत भागितां येतील, असे कीं त्यांतील प्रत्येक भाग १३ होईल, अथवा १५६ यांत किती तेरा आहेत ? अशा प्रश्नाचे उलगडण्यास भागाकार ह्मणतात. या पक्षांत, १५६ यांस भाज्य ह्मणतात, १३ यांस भाजक ह्मणतात, आणि शिच्छिलेल्या भागांस भागाकार ह्मणतात ; आणि भागाकार केल्यानंतर, १५६ यांस १३ नीं भागिलें असें ह्मणतात.

७०. १५६ यांतून १३ वजा करावे, आणि नंतर बाकींतून पुनः १३ वजा करावे, आणि याप्रमाणें पुढें करित जावें; अथवा व्यवहारी बोलण्याप्रमाणें १५६ हे १३ नीं मोजून घ्यावे, ही भागाकार करण्याची सोपी रीति आहे. यासारखीच कृति (४६) कलमांत वजाबाकीचे अभ्यासाविषयींचा उदाहरणांत सांगितली आहे. आतां वर सांगितल्याप्रमाणें कर, आणि प्रत्येक वजाबाकी १५६ नांतून १३ कमी करिती, ही आठवण राहण्यासाठीं प्रत्येक वजाबाकीचे समोर १ हा अंक मांड, ह्मणजे ही कृति या पुढीलप्रमाणें होईल.

१५६	पहिल्याने १५६ नांतून १३ वजा कर, ह्मणजे १४३
१३ १	राहातील. नंतर १४३ नांतून १३ वजा कर, ह्मणजे
१४३	१३० राहतील ; आणि याप्रमाणें पुढेहि. शेवटीं १३ मात्र
१३ १	राहतात, आणि त्यांतून १३ वजा केल्याने कांहीं राहात
१३०	नाहीं. तेव्हां किती वेळा १३ वजा केले हें मोजल्याने
१३ १	असें दिसते, कीं ते १२ वेळा वजा केले आहेत; अथवा
११७	१५६ यांत १३ हे १२ वेळा जातात.

१३ १	ही मुर्वाहून सोपी रीति आहे, आणि ही नुसत्या ख-
१०४	ज्यांनीं होईल. आरंभीं १५६ खज्यांची रास घे. नं-
१३ १	तर त्या राशींतून १३ खडे घेऊन ते एक वाजूस ठेव.
	नंतर राशींतून दुसरे १३ खडे घेऊन त्यांची वरप्रमाणें नि-



९१ राखी रास कर; आणि सगळे खडे संपतपावेतों पुनः  
 १३ १ पुनः असें करित जा. शेवटीं वेगळाल्या राशी मोजल्या-  
 ७८ वर त्या १२ आहेत असें दिसेल.

१३ १ ७१. भागाकार ह्मणजे गुणाकाराची उलट कृति  
 ६५ आहे. गुणाकारामध्ये, कित्येक राशींची संख्या अस-  
 १३ १ ती, जा प्रत्येकींत एकसारखेच खडे असतात, आणि  
 ५२ त्यावरून सर्वांत किती खडे आहेत, हें जाणण्याची इच्छा  
 १३ १ असती. भागाकारांत सर्व खडे किती आहेत, आणि प्र-  
 ३९ त्येक वेगळाले राशींत किती किती असावे हें माहित असतें,  
 १३ १ त्यावरून अशा किती राशी होतील, हें जाणायाची इच्छा  
 २६ असती.

१३ १ ७२. मागील उदाहरणांत अशी संख्या घेतली, कीं  
 १३ तींत १३ अमुक वेळा वरोवर जातात. परंतु प्रत्येक संख्ये-  
 १३ शीं असें घडत नाहीं. उदाहरण, १५९ ही संख्या घे.  
 १३ १ (७०) प्रमाणें कृतिकर, नंतर दिसण्यांत येईल, कीं १३  
 ० हे १२ वेळा वजा केल्यानंतर ३ बाकी राहतात, ह्मणून

त्यांतून १३ वजा होत नाहीत. तर असें ह्मणण्यांत येतें कीं १५९  
 यांत १२ वेळा १३ आहेत, आणि ३ वर राहतात; अथवा १५९  
 यांस १३ नीं भागिलें असतां, भागाकार १२ आणि बाकी ३ राह-  
 तात. चिन्हें कामांत आणिलीं असतां, हें या पुढीलप्रमाणें होईल;

$$१५९ = १३ \times १२ + ३.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१४६ = २४ × ६ + २, अथवा १४६ यांत सहा, चौवीस वेळा जा-  
 तात आणि २ वर राहतात.

१४६ = ६ × २४ + २, अथवा १४६ यांत चौवीस, सहा वेळा जातात  
 आणि २ वर राहतात.

३०० = ४२ × ७ + ६, अथवा ३०० यांत बेचाळीस, सात वेळा जा-  
 तात आणि ६ वर राहतात.

$$३९६२४ = ७२७७ \times ५ + ३२३९.$$

७३. जर अ मध्ये ब हा क वेळा जातो आणि र बाकी राहातो, तर अ हा बक पेक्षा रने अधिक आहे; हणजे,

$$अ = बक + र.$$

जर काहीं बाकी नसली, तर  $अ = बक$ . वरचे उदाहरणांत अ भाज्य, ब भाजक, क भागाकार, आणि र बाकी आहे. अमध्ये ब हा क वेळा जातो हे दाखवायासाठी या पुढीलप्रमाणे मांडितात,

$$\frac{अ}{ब} = क, \text{ अथवा } अ : ब = क,$$

कित्येक पूर्वीचा जुन्या पुस्तकांत याप्रमाणे मांडितात ;

$$अ \div ब = क.$$

७४. १५६ यांचे निरनिराळे भाग जर केले, आणि त्या प्रत्येक भागांत १३ किती वेळा जातात हे जर पाहिले, तर स्पष्ट आहे की जितक्या वेळा त्या वेगळाल्ये भागांत १३ जातात, तितक्या वेळा मिळून १३ हे १५६ नांत जातात. उदाहरण, ९१, ३९, आणि २६ हे मिळून १५६ होतात. या वेगळाल्या भागांत,

९१ यांत १३ हे ७ वेळा जातात,

३९ यांत १३ हे ३ वेळा जातात,

२६ यांत १३ हे २ वेळा जातात;

यामुळे ९१+३९+२६ यांत १३ हे ७+३+२ वेळा, अथवा १२ वेळा जातात.

पुनः, १००, ५०, आणि ६, मिळून १५६ होतात.

आतां १०० यांत १३ हे ७ वेळा जाऊन ९ वर राहातात,

५० यांत १३ हे ३ वेळा जाऊन ११ वर राहातात,

६ यांत १३ हे ०\* वेळा जाऊन ६ वर राहातात.

यामुळे १००+५०+६ यांत १३ हे ७+३+० वेळा जाऊन, ९+११+६ वर राहातात; अथवा १५६ यांत १३ हे १० वेळा जाऊन २६ वर राहातात. परंतु २६ यांत १३ हे २ वेळा जातात; यामुळे १५६ यांत १३ हे १० आणि २ वेळा, अथवा १२ वेळा जातात.

\* एक सारिखेच बोलणे राहायासाठी, ६ मध्ये १३ जात नाही असे हणत नाही, परंतु त्याचे जागी असे झटले पाहिजे, की ६ मध्ये १३ हे ० वेळा जाऊन ६ वर राहातात, याचा अर्थ ६ हे ० पेक्षा ६ नी अधिक आहेत असे हणणे मात्र आहे.

७५. मागील कलमांतल्ये उदाहरणाची गोष्ट या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येती.

$$\text{जर } अ = व + क + ड, \text{ तर } \frac{अ}{म} = \frac{व}{म} + \frac{क}{म} + \frac{ड}{म}$$

७६. पहिल्या उदाहरणांत, अतिसोप्ये रितीनें उलगडायासाठीं, १३ हे एक वेळेपेक्षां अधिक वेळा वजा केले नाहींत. परंतु दोन वेळा १३, तीन वेळा १३, इत्यादि जाणल्यास, जितके वेळा १३ वजा करायास इच्छिलें, तितक्या वेळा १३ एकदांच वजा करितां येतील, परंतु त्या वेळा वजावाकीचे बाजूस आठवणीसाठीं लिहिल्या पाहिजेत. उदाहरण, १० वेळा १३, ह्मणजे १३०, हे एकदांच १५६ यांतून वजा कर, २ वेळा १३, ह्मणजे २६ त्या वजावाकींतून घे; ह्मणजे या प्रमाणें कृति होईल;

$$\begin{array}{r} १५६ \\ १३० \dots\dots १० \text{ वेळा } १३. \\ \hline २६ \\ २६ \dots\dots २ \text{ वेळा } १३. \\ \hline ०० \end{array}$$

यामुळें १५६ यांत १३ हे १०+२, अथवा १२ वेळा जातात.

पुनः, ३०९६ यांस १८ यांणीं भाग.

$$\begin{array}{r} ३०९६ \\ १८०० \dots १०० \text{ वेळा } १८. \\ \hline १२९६ \\ ९०० \dots ५० \text{ वेळा } १८. \\ \hline ३९६ \\ ३६० \dots २० \text{ वेळा } १८. \\ \hline ३६ \\ ३६ \dots २ \text{ वेळा } १८. \\ \hline ०० \end{array}$$

यामुळें ३०९६ यांत १८ हे १०० + ५० + २० + २, अथवा १७२ वेळा जातात.

७७. यावरून हीं पुढील बाक्यें ध्यानांत येतील, आणि दुसऱ्या कोणत्याहि संख्यांविषयीं तशी प्र-  
तिष्ठा करितां येईल.

४५० हे ७५ x ६ आहेत; यामुळें कोणतीहि संख्या, जसें ५, हे

जितक्या वेळा ७५ यांत जातात, त्यांचे ६ पट त्या सर्व संख्येतून जाताल.

१३५ यांत ३ हे ... २६ वेळांपेक्षा अधिक वेळा जातात; यामुळे,

२ वेळ १३५ यांत ३ हे ... ५२ अथवा २ वेळा २६ पेक्षा अधिक वेळा जातात.

१० वेळ १३५ यांत ३ हे ... २६० अथवा १० वेळा २६ पेक्षा अधिक वेळा जातात.

५० वेळ १३५ यांत ३ हे ... १३०० अथवा ५० वेळा २६ पेक्षा अधिक वेळा जातात.

४७२ यांत १८ हे ... २१ वेळांपेक्षा अधिक वेळा जातात; यामुळे,

४७२० यांत १८ हे ... २१० वेळांपेक्षा अधिक वेळा,—

४७२०० यांत १८ हे ... २१०० वेळांपेक्षा अधिक,—

४७२००० यांत १८ हे ... २१००० वेळांपेक्षा अधिक,—

३२ यांत १२ हे ... २ वेळांपेक्षा अधिक—परंतु ३ वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात.

३२० यांत १२ हे ... २० वेळां .. ३० वेळां—

३२०० यांत १२ हे ... २०० वेळां .. ३०० वेळां—

३२००० यांत १२ हे ... २००० वेळां .. ३००० वेळां—

इत्यादि.

इत्यादि.

इत्यादि.

७८. वरचा कलमामध्ये भागाकाराची मूलकारणे आहेत. आतां तीं संक्षेपाने आणि सोईने कामांत आणावी, इतकें मात्र दाखवायाचें राहिलें. मनांत आण कीं ४०६८ यांस १८ नीं भागायाचें, अथवा (२३) प्रमाणें  $\frac{४०६८}{१८}$  हे किती येतात हें जाणण्याची इच्छा आहे.

जर ४०६८ यांचे अनेक भाग केले, तर त्या प्रत्येक भागांत १८ किती वेळा जातात हें (७४) चे कृतीवरून निघेल, आणि त्यावरून त्या सर्व अंकांत १८ किती वेळा जातात हें कळेल. आतां, ४०६८ यांचे कसे भाग केव्याने सोईस पडेल? पहा कीं ४०६८ यांचा पहिला अंक .४,

यांत १८ कांहीं वेळा जात नाही; परंतु ४० हे दोन अंक मिळून, त्यांत १८ हे २ वेळांपेक्षा अधिक, परंतु ३ वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात. परंतु (२०) प्रमाणें ४०६८ ही संख्या ४० शतक आणि ६८ आहे; ४० शतक यांत (७७) प्रमाणें १८ हे २०० वेळांपेक्षा अधिक, परंतु ३०० वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात. यामुळे, ४०६८ यांत १८ हे २०० वेळांपेक्षा अधिक वेळा जातात, कां कीं ४००० यांत १८ हे २०० वेळांपेक्षा अधिक वेळा जातात. आणखी त्या संख्येंत १८ हे ३०० वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात, कां कीं ३०० वेळा १८ हे ५४०० आहेत, आणि ४०६८ यांपेक्षा अधिक आहेत. आतां ४०६८ यांतून २०० वेळा १८ अथवा ३६०० वजा कर, तर ४६८ राहातील. यामुळे, ४०६८ यांत १८ हे २०० वेळा जातात, आणि ४६८ यांत १८ जितके वेळा जातात, तितके वेळा अधिक जातात.

आतां, ४६८ यांत १८ किती वेळा जातात, हें काढायाचें राहिलें. तर पूर्वीप्रमाणेंच कर. पहा ४६ यांत १८ दोन वेळांपेक्षा अधिक आणि तीन वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात; यामुळे (७७) प्रमाणें ४६० यांत १८ हे २० वेळांपेक्षा अधिक आणि ३० वेळांपेक्षा कमी वेळा जातात; ४६८ यांतहि तितक्याच वेळा जातात. तर २० वेळा १८ ह्यणजे ३६० यांस ४६८ तून वजा करून बाकी १०८ राहातात. यामुळे ४६८ यांत १८ हे २० वेळा जातात, आणि १०८ यांत जितके वेळा १८ जातात, तितक्या अधिक वेळा जातात. आतां, १०८ यांत १८ बरोबर ६ वेळा जातात असें दिसतें; यामुळे, ४६८ यांत १८ हे २० + ६ वेळा जातात, आणि ४०६८ यांत १८ हे २०० + २० + ६, अथवा २२६ वेळा जातात. जर भाजक, भाज्य, आणि भागाकार, हे कौसानें वेगळे करून एके ओळींत मांडिले, आणि कांहीं विवरण केल्यावांचून वर दाखवलेली कृति केली, तर ती या खालचा (अ) उदाहरणाप्रमाणें होईल.

३६३२६५९९ यांस १३४२ यांनीं भागायाचें आहे असें मनांत आण (ब).

(ब)

१३४२) ३६३२६५९९ (२०००० + ७००० + ६० + ९

२६८४००००

- ९४८६५९९

९३९४०००

.. ९२५९९

८०५२०

१२०७९

१२०७८

... १

(अ)

१८) ४०६८ (२०० + २० + ६

३६००

- ४६८

३६०

१०८

१०८

..

पूर्वीचा उदाहरणाप्रमाणे, ३६३२६५९९ यांस ३६३२०००० आणि ६५९९ या दोन भागांत विभागिले आहेत; भाजकापेक्षा अधिक असी संख्या असायासाठी भाज्याचे डाव्येकडून चार अंक घ्यावे लागतात, म्हणून, ३६३२ हे पहिले चार अंक दुसऱ्यांपासून वेगळे केले आहेत. पुनः ३६३२०००० यांत १३४२ हे २०००० पेक्षा अधिक आणि ३०००० यापेक्षा कमी वेळा जातात असे दिसते; आणि १३४२ x २००००, यांस भाज्यांतून वजा करून ९४८६५९९ बाकी राहतात. पुनः पुनः असी कृति करून, दिसते, की २०००० + ७००० + ६० + ९, अथवा २७०६९ असा भागाकार होतो, आणि बाकी १ राहतो.

पुढे चालायाचे पूर्वी हे पुढील प्रश्न वरचा कलमांतील कृतीप्रमाणे विस्ताराने करावे.

१००९३८७४    ६६७७९९२२    २७१८२१८    } यांचा किमती

३२०७

११४४३३

१३३५२

} काय आहेत!

यांचे वेगवेगळे भागाकार, ३१४७, ५८३, २०३, आणि त्यांचा वेगवेगळ्या बाक्या १४४५, ६५४८३, ७७६२, अशा आहेत.

७२. मागील कलमाचा उदाहरणांत, पहा, की पहिल्याने, शून्यां शिवाय दुसरे अंक त्यांचे त्यांचे जागी ठेविले, तर वजाबाकीचे उजव्याकडे जी शून्ये आहेत, त्यांस मांडायाचे प्रयोजन नाही; दुसऱ्याने, भा

ज्याचे उजव्येकडील जे अंक शून्यावर येतात, त्यांचे मांडण्याचें काम पडत नाहीं, परंतु कृति करतांना त्यांचे खालचीं शून्यें नाहींशीं झाल्यावर ते घ्यावे लागतात, कां कीं वजाबाकी करण्यांत ते कामांत येत नाहीं; तिसऱ्यानें, वरचे विस्तार रितीप्रमाणें भागाकाराची संख्या लांब लिहिण्याचें प्रयोजन नाहीं, ते अंक मात्र लिहिले पाहिजेत. उदाहरण, वर दाखविलेला पहिला भागाकार  $२००+२०+६$ , अथवा  $२२६$  आहे; दुसरा भागाकार  $२००००+७०००+६०+९$ , अथवा  $२७०६९$  आहे. तर यावरून, पहिल्या ओळीशिवाय, सर्व शून्यें आणि त्यांचे वरले अंक सोडून दे, आणि एक ओळींत भागाकार मांड; ह्मणजे मागल्या क्रमाचीं दोन उदाहरणें याप्रमाणें होतील.

१८)  $४०६८$  ( $२२६$        $१३४२$ )  $३६३२६५९९$  ( $२७०६९$

$$\begin{array}{r}
 ३६ \\
 \hline
 ४६ \\
 ३६ \\
 \hline
 १०८ \\
 १०८ \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 २६८४ \\
 \hline
 ९४८६ \\
 ९३९४ \\
 \hline
 \dots ९२५९ \\
 ८०५२ \\
 \hline
 १२०७९ \\
 १२०७८ \\
 \hline
 \dots १
 \end{array}$$

८०. यावरून ही पुढील रीति निघती;

**पहिल्यानें.** भाजक आणि भाज्य एक ओळींत मांड, आणि भाज्याचे दोहों बाजूस कोंस कर.

**दुसऱ्यानें.** भाज्याचा डाव्येकडून इतके अंक घे, कीं त्यांची संख्या भाजकापेक्षां एक अंक अधिक होईल; या अंकांत भाजक किती वेळा जातो तें काढ, आणि तो वेळांक भागाकाराचे डाव्येकडील पहिल्या-स्थळीं मांड.

**तिसऱ्यानें.** वर सांगितल्याप्रमाणें आलेल्या अंकानें भाजकास गुण, आणि जे अंक भाज्याचे डाव्येकडून घेतले, त्यांचे खालीं वरचा गुणाकार मांडून तो वरचा अंकांतून वजा कर.

**चवथ्यानें.** दुसऱ्यानें सांगितल्याप्रमाणें जे अंक वेगळे घेतले, त्यांचे

उजव्येकडील जवळचा अंक या वजावाकीचे उजव्येकडे मांड; असे वाढविल्याने वजावाकी जर भाजकापेक्षा अधिक असेल, तर त्यांत भाजक किती वेळा जातो ते काढ; तो वेळांकभागाकाराचा पूर्वीचा अंकाचे उजव्येकडे मांड, आणि असे पुनः पुनः करित जा; जर वजावाकी वाढविल्यानंतर भाजकापेक्षा अधिक नसली, तर भाज्यांतील दुसरा अंक तिचे उजव्येकडे मांड, आणि त्यानंतर दुसरा अंक मांड, आणि जोंपर्यंत ती बाकी भाजकापेक्षा मोठी होई तोंपर्यंत असे कर; परंतु शेवटील घेतलेल्या अंकाशिवाय जितके भाज्यांतून अंक घेऊन मांडिले असतील, त्या प्रत्येकाविषयी भागाकार स्थळी एक शून्य मांडिले पाहिजे हे स्मरणांत ठेवावे.

पांचव्याने. भाज्यांतील सर्व अंक संपतपावेतों या रितीने करित चाल.

कोणखेहि मोठ्ये संख्येत, भलती मोठी संख्या किती वेळा जाईल, हे पहायासाठी, दोहों संख्यांतून अंकांची सारखी संख्या घेऊन, मोठी संख्या न घेतां त्यांशी कृति केल्याने, अटकळीने उत्तर कळेल. जसे, ४७३२ आणि १४३७९ यांतून ४ आणि १४ घेतले, तर १४ मध्ये ४ जितके वेळा जातात तितके वेळा सुमाराने १४३७९ यांत ४७३२ जातील, ह्मणजे सुमाराने ३ वेळा. कारण कीं १४००० यांत जितक्या वेळा ४००० जातात, तितक्या वेळा १४ मध्ये ४ जातात, आणि ४००० आणि १४००० यांचे आणि सांगितल्ये अंकांचे अंतर शतक, दशक इत्यादि लहान अंक येते. तर सुमाराने कळेल, कीं १४००० यांत ४००० जाण्याचा आणि १४३७९ यांत ४७३२ जाण्याचा, या दोहों वेळांत फार अंतर पडणार नाही; आणि बढत करून याप्रमाणेच घडते. परंतु भाजकाचा दुसरा अंक ५ किंवा ५ पेक्षा अधिक असेल, तर वर सांगितल्याप्रमाणे कृति केल्याचे पूर्वी, भाजकाचे डावेकडील पहिला अंक १ ने वाढविल्याने सोपे पडेल. ही अटकळ करण्याची इशारी केवळ अभ्यासाने येईल.

८१. गुणाकार कोष्टक चांगला पाठ केल्यानंतर, (५०) प्रमाणे जर भाजक १२ पेक्षा अधिक नसेल, तर वरची कृति अधिक सरळ होईल. उदाहरण, १३२९७६ यांस ४ नीं भागायाचे आहे असे मनांत आण. विस्ताराने कृति पुढीलप्रमाणे होईल.



४) १३२९७६ (३३२४४

१२

१२

१२

०९

८

१७

१६

०१६

१६

००

परंतु १३ मध्ये ४ हे ३ वेळा जा-  
तात, आणि १ बाकी राहाती, ती  
मांडल्यावांचून स्मरणांत राहिल; जो  
१ राहिला त्यास, भाज्यांतील पुढील  
अंक, ह्यणजे, २ याचे पूर्वी मांडून  
१२ होतील, त्या बारामध्ये ४ हे ३  
वेळा बरोबर जातात, आणि याप्रमाणें  
पुढें. भागाकार मांडायास ही पुढील  
रीति सोईची आहे;

४) १३२९७६

३३२४४

एथें या पुढील गोष्टी सांगायास योग्य आहेत; ५ यांणीं गुणायाचें  
असेल, तर उजव्येकडे शून्य जोडून २ नीं भागावें, ही ५ नीं गुणा-  
कार करण्याची सोपी रीति आहे, कां कीं १० वेळांचे अर्ध्या ५ वेळा  
आहेत. ५ यांणीं भागायाचें असेल, तर पहिल्यानें २ नीं गुणून उज-  
व्येकडचा शेवटील अंक छेकल्यानें भागाकार होईल; आणि छेकलेल्या  
अंकाचें अर्ध भागाकाराची बाकी होईल. २५ यांणीं गुणायाचें असेल,  
तर दोन शून्यें जोडून ४ नीं भाग. २५ यांणीं भागायाचें असेल,  
तर ४ नीं गुणून त्याचे शेवटील दोन अंक छेकून भागाकार होतो;  
दोन शेवटील छेकलेल्ये अंकांचा चतुर्थांश बाकी होईल. कोणताहि  
अंक ९ नीं गुणायाचा असेल, तर त्या अंकास एक शून्य जोडून, त्या-  
तून तो सांगितलेला अंक वजा कर, ह्यणजे, तो अंक १० वेळा घेतला  
आणि त्यांतून तो अंक एक वेळा वजा केला अशी त्याची कृति आहे.  
९९ यांणीं गुणायाचें असेल, तर दोन शून्यें जोडून त्यांतून सांगितलेला  
अंक वजा कर, इत्यादि.

कोणतीहि संख्या २ यांणीं निःशेष भागावयाजोगी असायासाठीं,  
तिचे एकचे स्थळींचा अंक सम\* असला पाहिजे. कोणतीहि संख्या

\* शून्यास सम अंक असे मानितात.

४ यांणीं निःशेष भागायाजोगी असायासाठी, तिचे उजव्येकडील दोन अंक ४ नीं निःशेष भागिले जावे. उदाहरण, १२३६ ही संख्या घे; ही संख्या १२ शें आणि ३६ मिळून झाली आहे, आणि तिचा पहिला भाग शतकाचा आहे, ह्मणून तो ४ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि त्यापासून १२ पंचवीस येतात, आणि १२३६ ही संख्या ४ नीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, हें तिचा शेवटील दोन अंक, ह्मणजे, ३६, हे ४ नीं निःशेष भागले जातील कीं नाहीं, यावरून कळेल. जर कोणत्याहि संख्येचे उजवे बाजूचा शेवटील तीन अंक ८ नीं निःशेष भागिले जातात, तर ती संख्याहि ८ नीं निःशेष भागिली जाईल; कारण कीं उजव्येकडचा शेवटील तीन अंकांशिवाय संख्येतील कोणताहि अंक हजारांचा असतो, आणि ८ नीं १००० निःशेष भागिले जातात; यावरून ती सर्व संख्या ८ नीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, हें शेवटील तीन अंकांवरून कळतें; जसे १२७९४६ ही संख्या ८ नीं निःशेष भागिली जात नाहीं, कारण कीं ९४६ हे शेवटील तीन अंक ८ नीं निःशेष भागिले जात नाहींत. जेव्हां एकाद्या संख्येचा अंकांची बेरीज ३ अथवा ९ यांणीं निःशेष भागिली जाती, तेव्हां ती संख्या ३ अथवा ९ यांणीं निःशेष भागिली जाईल. उदाहरण, १२३४ ही संख्या घे; ह्मणजे,

१ हजार, अथवा ९९९ आणि १

२ शें, अथवा २ वेळा ९९ आणि २

३ दशक, अथवा ३ वेळा ९ आणि ३

आणि ४ एक अथवा ..... ४

आतां ९, ९९, ९९९, इत्यादि, हे सर्व ९ आणि ३ यांणीं निःशेष भागिले जातात हें स्पष्ट दिसतें, आणि ते अंक वारंवार घेऊन जो अंक होईल तोहि ९ आणि ३ यांणीं निःशेष भागिला जाईल. तर १२३४ ही संख्या ३ अथवा ९ यांणीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, हें  $१+२+३+४$ , अथवा वेगळान्या अंकांची बेरीज, ९ अथवा ३ यांणीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, यावरून कळतें. जेव्हां एकादी संख्या सम असून तिचा वेगळान्या अंकांची बेरीज ३ नीं निःशेष भागिली जाती, तर ती सर्व संख्या ६ नीं निःशेष भागिली जाईल, हें वर सांगितलेल्या गोष्टीवरून कळतें. जेव्हां एकाद्या संख्येचा एकचा स्थळी

० किंवा ५ असतील, तर ती संख्या ५ नीं निःशेष भागिली जाईल.

८२. जेव्हां भाजक १ आहे, आणि त्याचे उजव्येबाजूस शून्ये आहेत, तेव्हां भागाकार करण्याची रीति अति सोपी आहे. ती या पुढील : न कळेल.

या च आहे ; भाजकाचे उजव्येकडेस जितकीं शून्ये आहेत, त्याचे उजवेकडील अंक छेकून टाक; छेकलेले अंक बाकी होईल, आणि भाज्याचे राहिलेले अंक भागाकार होईल.

१००)३३४२९(३३४

३००

३४२

३००

४२९

४००

२९

अथवा हीं उतरें खरीं आहेत  
हें याप्रमाणें सिद्ध करितां येईल;

(२०) प्रमाणें, २७१७३१६

यांत २७१७३१ दशक आणि

६ आहेत, त्या पहिल्या संख्येंत

१० हे २७१७३१ वेळा जा-

तात आणि दुसरींत १० जात

नाहींत; यामुळे (७२) प्रमाणें

२७१७३१ हा भागाकार, आ-

१०)२७१७३१६

२७१७३१ आणि ६ बाकी.

णि ६ ही बाकी आहे. पुनः

(२०) प्रमाणें, ३३४२९ यांत

३३४ शतक आणि २९ आहेत; त्या पहिलींत १०० हे ३३४ वेळा

जातात, आणि दुसरींत १०० जात नाहींत; यामुळे ३३४ भागाकार आ-

णि २९ बाकी आहे.

८३. जेव्हां भाजकाचे उजव्येकडेस शून्ये आहेत, तेव्हां भागाकार करण्याची रीति संक्षिप्त कशी करावी, हें या पुढील उदाहरणांपासून कळेल. प्रत्येक उदाहरणाचे एकीकडे तेंच उदाहरण अनुपयोगी अंक छेकून मांडिलें आहे; आणि तीं प्रत्येक दोन दोन उदाहरणें परस्पर ताडून पाहिलीं असतां, या कलमाचा शेवटीं जी रीति सांगिल्ली, ती प्यानांत येईल.

१७८२०००)	६४२४७००००००(३६०५ १७८२)	६४२४७००(३६०५
	५३४६०००	५३४६
	१०७८७०००	१०७८७
(१.)	१०६९२०००	१०६९२
	९५०००००	९५००
	८९१००००	८९१०
	५९०००००	५९०००००

१२३०००००)	४२१७६१८९३००(३४२८ १२३)	४२१७६१(३४२८
	३६९००००००	३६९
	५२७६१८९३	५२७
(२.)	४९२००००००	४९२
	३५६१८९३०	३५६
	२४६००००००	२४६
	११०१८९३००	११०१
	९८४००००००	९८४
	११७८९३००	११७९३००

याची रीति हीच आहे; भाजकाचे उजव्ये बाजूस जितकी शून्ये आहेत, तितके भाज्यांतील अंकां छेक. नंतर भाजकांतील सर्व शून्ये छेकून, चालखे रीतीप्रमाणे भागाकार कर; परंतु कृति संपल्यावर जितके भाज्यांतील अंक छेकले, तितके खाली बाकीचे उजव्येकडेस मांड.

#### ८४. अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

भाज्य.	भाजक.	भागाकार.	बाकी.
९६९४	४७	२०६	१२
१७५६१८	३१३६	५६	२
२३७९६४८४	१३००००	१८३	६४८४
१४००२५६४	१८७१	७४८४	०
३१०३१४४२०	७८७८	३९३९०	०
३९३९०४०६४७	६८८९	५७१७८७	४
२२८७६७९२४५४९६१	४३०४६७२१	५३१४४१	०

† छणजे शून्ये जसेस धरून त्यांचे मर्याद लागतील तितके अंक घेऊन छेक.

$$(१). \frac{१०० \times १०० \times १०० - ४३ \times ४३ \times ४३}{१०० - ४३} = \frac{१०० \times १०० + १००}{\times ४३ + ४३ \times ४३}$$

$$(२). \frac{१०० \times १०० \times १०० + ४३ \times ४३ \times ४३}{१०० + ४३} = \frac{१०० \times १०० - १००}{\times ४३ + ४३ \times ४३}$$

$$(३). \frac{७६ \times ७६ + २ \times ७६ \times ५२ + ५२ \times ५२}{७६ + ५२} = ७६ + ५२$$

$$(४). १ + १२ + १२ \times १२ + १२ \times १२ \times १२ = \frac{१२ \times १२ \times १२ \times १२ - १}{१२ - १}$$

ही उदाहरणे करून दाखीव.

१३७६४२९ यांचे अति ज्वळची संख्या कोणती आहे, जी ३६३०० यांणीं निःशेष भागिली जाईल? उत्तर. १३७९४००

जर १ वर्षांत ३६ बैल २१६ एकरांतील गवत खातात, आणि जर एक मेंढा बैलाचे निमें खातो, तर ४९ बैल आणि १३६ मेंढे मिळून १७५५० एकरांतील गवत किती काळांत खातील? उत्तर. २५ वर्षे.

८५. भलते दोन अंक घे, असे कीं एक दुसऱ्यास निःशेष भागितो; जसे ३२ आणि ४. या दोन अंकांस भलत्या दुसऱ्या अंकानें गुण; जसे ६ यांणीं. त्यांचा गुणाकार १९२ आणि २४ होईल. आतां, जितक्या वेळा ३२ यांत ४ जातात, तितक्या वेळा १९२ यांत २४ जातील. मनांत आण कीं ६ टोपल्या आहेत, आणि प्रत्येक टोपलींत ३२ खडे आहेत, तर सर्व टोपल्यांत १९२ होतील. एक टोपलींतून ती रिकामी होई ती, ४ खडे वारंवार काढ. स्पष्ट आहे कीं, केवळ एकच टोपलींतून ४ काढल्याचे जागीं, प्रत्येक टोपलींतून ४ काढले असतां, सर्व ६ टोपल्या एकदांच रिकाम्या होतील; ह्मणजे जितक्या वेळा ३२ यांत ४ जातात, तितक्या वेळा, ६ वेळा ३२ यांत ६ वेळा ४ जातात. हा तर्क दुसऱ्या संख्यांस लागू होतो. यामुळे, भाज्य आणि भाजक हे एकच संख्येनें गुणिले असतां त्यांचे भागाकारांत कांहीं फेर पडत नाही.

८६. पुनः मनांत आण कीं २०० यांस ५० यांणीं भागायाचे आहे. भाज्य आणि भाजक एकच संख्येनें भाग, जसे ५ नीं. तर

२०० हे ५ वेळा ४० आणि ५० हे ५ वेळा १० आहेत. परंतु (८५) प्रमाणें ४० भागिले १० यांचा भागाकार, ५ वेळा ४० भागिले ५ वेळा १० यांचे भागाकाराबरोबर आहे, आणि यामुळे, भाज्य आणि भाजक हे एकच संख्येनें भागिले असतां, त्यांचे भागाकारांत कांहीं फेर पडणार नाहीं.

८७. (५५) प्रमाणें, जर कोणतीहि संख्या अनुक्रमें दुसऱ्या दोन संख्यांनीं गुणिली, तर ती पहिली संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचे गुणाकारानें गुणिल्याबरोबर होईल. जसे, २७ यांस पहिल्यानें ५ नीं गुणून पुनः तो गुणाकार ३ यांणीं गुणिला, आणि २७ यांस ५ वेळा ३ अथवा १५ यांणीं गुणिलें, हीं दोन्हीं बरोबर होतील. जर कांहीं संख्या दुसऱ्या कांहीं संख्येनें भागिली, नंतर, तो भागाकार दुसऱ्या संख्येनें भागिला, अथवा ती पहिली संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचे गुणाकारानें भागिली, तर त्या दोहोंचें उत्तर सारखेंच आहे. उदाहरण, ६० यांस ४ नीं भागिलें असतां १५ येतात, या भागाकारास ३ नीं भागिलें असतां, ५ येतात. ६० यांत १५ असे ४ समभाग आहेत, आणि तो प्रत्येक समभाग बरोबर ३ समभागांत विभागिला, तर सर्व मिळून १२ समभाग होतात; अथवा पहिल्यानें ४ आणि दुसऱ्यानें ३ यांणीं भागावें, अथवा  $४ \times ३$ , अथवा १२ नीं एकदांच भागावें या दोन्हीं कृती सारख्याच आहेत, हें स्पष्ट आहे.

८८. पुढे जा रिती सांगतो त्या उदाहरणांपासून लक्षांत येतील. ३२ यांस २४ नीं गुणून तो गुणाकार ६ नीं भागिला, आणि २४ भागिले ६ नीं ह्मणजे ४, या भागाकारानें ३२ गुणिले हीं दोन्हीं उत्तरे बरोबर होतील; कां कीं २४ यांचा ६ वा भाग ४ आहे, याकरितां कोणतीहि संख्या २४ वेळा घेऊन तिचा ६ वा भाग, आणि तीच संख्या ४ वेळा घेतली हीं दोन्हीं बरोबर आहेत; अथवा २४ नीं गुणून ६ नीं भागावें, हें ४ नीं गुणिल्याबरोबर आहे.

८९. पुनः ४८ यांस ४ नीं गुणून, तो गुणाकार २४ नीं भागिला, अथवा २४ यांस ४ नीं भागून, ह्मणजे ६ या भागाकारानें ४८ यांस एकदांच भागिलें, हीं दोन्हीं बरोबर आहेत. कां कीं ४८ यांत जो प्रत्येक एक ६ वेळा घेतला आहे, तोच एक ४ वेळा अधिक घेतला आहे, अथवा, ४ वेळा ४८ यांत तोच एक २४ वेळा घेतला आहे,

अथवा ४८ आणि ६ यांचा भागाकार, आणि ४८ × ४ आणि ६ × ४ यांचा भागाकार हीं दोन्ही बरोबर आहेत.

९०. बीजगणित रूपानें वरचे पांच कलमांचा कृती या पुढीलप्रमाणें मांडितां येतात ;

$$(८५) \text{ प्रमाणें } \frac{मअ}{मब} = \frac{अ}{ब}$$

जर अ आणि ब यांस न निःशेष भागितो, तर

$$(८६) \text{ प्रमाणें } \frac{\frac{अ}{न}}{\frac{ब}{न}} = \frac{अ}{ब} \quad (८७) \text{ प्रमाणें } \frac{\frac{अ}{ब}}{\frac{ब}{क}} = \frac{अ}{बक}$$

$$(८८) \text{ प्रमाणें } \frac{अब}{क} = अ \times \frac{ब}{क} \quad (८९) \text{ प्रमाणें } \frac{अक}{ब} = \frac{अ}{\frac{ब}{क}}$$

जा पक्षांत सर्व भागाकार निःशेष होतात, त्या पक्षास मात्र बरची गोष्ट लागू होती हें स्मरणांत ठेविलें पाहिजे.

९१. जेव्हां एक संख्या दुसऱ्या संख्येनें निःशेष भागिली जाती, अथवा, पहिल्या संख्येंत दुसरी संख्या कांहीं बरोबर वेळा जाती, तेव्हां ती दुसरी संख्या पहिल्या संख्येचा भाजक, किंवा मापक, अथवा ती पहिल्या संख्येस निःशेष मापिती, किंवा भागिती, असें म्हणतात. जसें ४ हे १३६ यांचे मापक आहेत, अथवा १३६ यांस ४ हे निःशेष मापितात; परंतु १३७ यांस ४ हे निःशेष मापीत नाहींत. मापक हा शब्द कामांत आणण्याचें कारण हें पुढील आहे; मनांत आण कीं एक काठी ४ फुटी लांबीची आहे, तिजवर कांहीं खुणा केलेल्या नाहींत, आणि त्या काठीनें कांहीं लांबी मापावयाची आहे; जसें एक रस्ता. तो रस्ता जर १३६ फुटी लांबीचा असेल, तर त्या काठीनें तो निःशेष मापितलां येईल; कां कीं १३६ यांत ४ हे ३४ वेळा जातात, यावरून कळेल, कीं रस्त्याची लांबी काठीचे लांबीचे बरोबर ३४ पट आहे. परंतु रस्त्याची लांबी १३७ फुटी असली, तर ती त्या काठीनें निःशेष मापवत नाहीं; कां कीं ३४ काळ्या मापल्यावर, कांहीं बाकी मापावयाची राहिली असें दिसेल, आणि यावरून त्या काठीचा कांहीं लहान मापावांचून, ती बाकीची लांबी मापवत नाहीं. यामुळे १३६ यांस ४ हे

निःशेष मापितात, परंतु १३७ यांस ४ निःशेष मापीत नाहीत असें ह्मणतात. तर जो भाजक संख्येस निःशेष भागितो, त्यास या संख्येचा निःशेष भाजक किंवा माप ह्मणतात.

९२. जेव्हां कांहीं संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचा मापक किंवा भाजक आहे, तेव्हां तीस, त्या दोन संख्यांचा साधारण मापक, किंवा भाजक ह्मणतात. जसे, १५ हे १८० आणि ७५ यांचा साधारण भाजक आहे. दोन संख्यांस अनेक साधारण भाजक असतात. उदाहरण, ३६० आणि १६८ यांचे साधारण भाजक २, ३, ४, ६, २४, आणि यांशिवाय दुसरेहि आहेत. आतां, यावरून कदाचित् हा पुढील प्रश्न उत्पन्न होईल; कीं ३६० आणि १६८ यांचा सर्व साधारण भाजकांतून, अति मोठा भाजक कोणता? अंकगणिताचे एक रितीपासून या प्रश्नाचें उत्तर कळेल, आणि त्यास अति मोठा साधारण भाजक ह्मणतात. अति मोठा साधारण भाजक यास, भास्कराचार्याचे रितीप्रमाणें दृढ भाजक ह्मणतात, त्याचा आतां विचार करितों.

९३. जर एक परिमाण दुसऱ्या दोन परिमाणांस भागितें, तर त्या दोन परिमाणांची बेरीज आणि वजाबाकी यांसहि तें परिमाण भागितें. जसे ७ हे २१ आणि ५६ यांस भागितात. यामुळे ५६+२१ आणि ५६-२१, अथवा ७७ आणि ३५ यांसहि ७ भागितात. पूर्वी (७४) कलमांत जी गोष्ट सांगितली, ती हीच आहे, परंतु एथें ती सांगण्याची तऱ्हा निराळी आहे.

९४. जर एक संख्या दुसऱ्या संख्येस भागिती, तर जितक्या संख्यांस ती दुसरी संख्या भागिती, त्या सर्व संख्यांसहि ती पहिली संख्या भागील. जसे, ५ हे १५ यांस भागितात, आणि १५ हे ३०, ४५, ६०, ७५, इत्यादि या सर्व संख्यांस भागितात; यावरून या सर्व संख्यांस ५ भागितील. स्पष्ट आहे, कीं जर,

१५ यांत ५ हे ३ वेळा जातात,

तर ३०, अथवा १५+१५ यांत ५ हे ३+३ वेळा, अथवा ६ वेळा जातात.

४५, अथवा १५+१५+१५ यांत ५ हे ३+३+३ वेळा, अथवा ९ वेळा जातात; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

९५. जी संख्या भाजक आणि भाज्य यांस भागिती, ती बाकीसहि भागिती. हें दाखवायासाठीं, ३६० यांस ११२ यांणीं भाग. यांचा



भागाकार ३ येउन बाकी २४ राहतात, ह्मणजे (७२) प्रमाणें ३६० हे ३ वेळा ११२ आणि २४ आहेत, अथवा  $३६० = ११२ \times ३ + २४$ . यावरून कळतें, कीं ३६० आणि ३ वेळा ११२ यांचें अंतर २४ आहे, अथवा  $२४ = ३६० - ११२ \times ३$ . ३६० आणि ११२ यांस जे अंक भागितात, त्यांतून कोणताहि एक घे; जसे, ४ तर

४ हे ३६० यांस भागितात,

४ हे ११२ यांस भागितात, आणि यामुळे (९४) प्रमाणें

$११२ \times ३$ , अथवा  $११२ + ११२ + ११२$  यांसहि भागितात,

यामुळे (९३) प्रमाणें  $३६० - ११२ \times ३$ , अथवा त्यांची वजावाकी ह्मणजे २४, यांसहि ४ भागितात. ३६० आणि ११२ यांचा सर्व दुसऱ्या भाजकाविषयीहि ही गोष्ट लागू होती; आणि यावरून हें सिद्ध होतें, कीं जें परिमाण भाज्य आणि भाजक यांस भागितें, तें त्यांचे बाकीसहि भागितें. यावरून भाज्य आणि भाजक यांचा जो प्रत्येक साधारण भाजक आहे, तोच भाजकाचा आणि बाकीचाहि साधारण भाजक आहे.

९६. भाजक आणि बाकी यांचा जो साधारण भाजक आहे, तोच भाजक आणि भाज्य यांचाहि साधारण भाजक आहे. वरचें उदाहरण घे, आणि लक्षांत ठेव कीं  $३६० = ११२ \times ३ + २४$  आहेत. बाकी २४ आणि भाजक ११२ यांचा कोणताहि साधारण भाजक घे; जसे ८. तर

८ हे २४ यांस भागितात;

आणि ८ हे ११२ यांस भागितात, आणि यामुळे (९४) प्रमाणें

$११२ \times ३$  यांसहि भागितात.

यावरून (९३) प्रमाणें ८ हे  $११२ \times ३ + २४$  यांस भागितात, अथवा ३६० भाज्यासहि भागितात. तर बाकीचा आणि भाजकाचा जो साधारण भाजक आहे, तोच भाजक आणि भाज्य यांचाहि साधारण भाजक आहे, अथवा बाकीचा आणि भाजकाचा असा कोणताहि साधारण भाजक नाही, कीं जो भाजक आणि भाज्य यांचाहि साधारण भाजक होत नाही.

९७. पहिल्यानें. (९५) कलमांत सिद्ध झालें, कीं भाजक आणि

भाज्य यांचे जे सर्व साधारण भाजक आहेत, ते बाकी आणि भाजक यांचेहि सर्व साधारण भाजक आहेत.

**दुसऱ्याने.** (९६) कलमांत सिद्ध झालें, कीं खांस काहीं दुसरे साधारण भाजक नाहींत.

यावरून निघते, कीं वर पहिल्यानें सांगितल्ये दुसऱ्ये दोन रकमांचा जो दृढभाजक आहे, तो पहिल्ये दोन रकमांचाहि दृढभाजक आहे, ह्मणजे यावरून कोणत्याहि दोन संख्यांचा दृढभाजका काढण्याची रीति पुढीलप्रमाणें कळेल ;

९८. वरचें उदाहरण घे, ह्मणजे ३६० आणि ११२ यांचा दृढभाजक काढण्याचा आहे असें मनांत आण, आणि पहा कीं

३६० भागिले ११२, यापासून २४ बाकी राहतात,

११२ भागिले २४, यापासून १६ बाकी राहतात,

२४ भागिले १६, यापासून ८ बाकी राहतात,

१६ भागिले ८, यापासून काहीं बाकी राहात नाहीं.

आतां ८ हे १६ यांस निःशेष भागितात, आणि ८ हे आठांस निःशेष भागितात, यास्तव ८ हे ८ आणि १६ यांचा दृ० भा० आहे, कारण कीं ८ यांस ८ पेक्षां कोणत्याहि मोठ्या अंकांनीं भागितां येत नाहीं; ह्मणजे १६ यांस जरी ८ पेक्षां अधिक मोठा साधारण भाजक असला, तरी तो १६ आणि ८ या दोहोंचा साधारण भाजक असत नाहीं.

यामुळे ८ हा १६ आणि ८ यांचा दृ० भा० आहे, (९७) प्रमाणें १६ आणि ८ यांचा जो दृ० भा०, तोच २४ आणि १६ यांचा दृ० भा० आहे,

२४ आणि १६ यांचा जो दृ० भा०, तोच ११२ आणि २४ यांचा दृ० भा० आहे;

११२ आणि २४ . . . . ., तोच ३६० आणि ११२ यांचा दृ० भा० आहे;

यामुळे ८ हा ३६० आणि ११२ यांचा दृ० भा० आहे. या पुढीलप्रमाणें दृ० भा० काढण्याची कृति मांडित्युत.

११२)३६०(३

३३६

२४)११२(४

९६

१६)२४(१

१६

८)१६(२

१६

०

११२ ३६० ३

९६ ३३६ ४

१६ २४ १

१६ १६ २

०

८

दोन संख्यांचा दृ० भा० काढण्याची रीति.

पहिल्याने. मोठी संख्या लहान संख्येने भाग.

दुसऱ्याने. त्यापासून जी बाकी राहाती, तीस नवा भाजक कर, आणि वरचे भाजकास भाज्यस्थळी मांडून, भागाकार करून दुसरी बाकी काढ.

तिसऱ्याने. याप्रमाणे बाकी न राहीपर्यंत पुढे करित जा, ह्मणजे शेवटील भाजक इच्छिलेला दृ० भा० होईल.

१९. कदाचित् असे कोणी विचारील कीं, जेव्हां दोन संख्यांस कोणताहि साधारण भाजक नाही, तर ही गोष्ट रितीवरून कशी कळेल? खरे ह्मटलें, तर अशा संख्यांच नाहीत, कां कीं सर्व संख्या १ याणें भागिल्या जातात; ह्मणजे सर्व संख्येत अनेक एकंचा संग्रह आहे, आणि यामुळे कोणत्याहि दोन संख्यांचा साधारण भाजक १ आहे. त्यांस दुसरा कांहीं साधारण भाजक नसला, तर शेवटील भाजक १ होईल, जसें या पुढील उदाहरणांत, ८७ आणि २५ यांचा दृ० भा० काढायास सांगितला आहे.

२५)८७(३

अभ्यासासाठी उदाहरणें.

७५

संख्या.

दृ० भा०

१२)२५(२

२४

१)१२(१२

१२

६१९७

५८३६३

५५४७

६२८१

२८९१५

१५०९

९५२१

२६०२

१४७००८४३

३२६०४१

३१४९५

३००३०९

१

१

१८४९

५७१

५

३

$$३६ \times ३६ + २ \times ३६ \times ७२ + ७२ \times ७२,$$

आणि  $३६ \times ३६ \times ३६ + ७२ \times ७२ \times ७२$ ; ह्या संख्या काय आहेत, आणि यांचा दृ० भा० काय आहे? उत्तर. ११६६४.

१००. जर दोन संख्या तिसऱ्या संख्येने भागिल्या जातात, आणि त्यांचे दोन भागाकार पुनः चवथ्या संख्येने भागिले जातात, तर ती तिसरी संख्या दृ० भा० नाही. उदाहरण, ३६०, आणि ५०४ ह्या दोन्ही ४ यांणीं भागिल्या जातात. त्यांचे भागाकार ९० आणि १२६ आहेत. आतां ९० आणि १२६ या दोन्ही ९ नीं भागिल्या जातात, आणि त्यांचे भागाकार १० आणि १४ आहेत. (८७) प्रमाणें, कोणतीही संख्या ४ नीं भागून, तो भागाकार ९ नीं भागिला, अथवा ती संख्या  $४ \times ९$  अथवा ३६ यांणीं एकदांच भागिली, तर त्या दोन्ही कृती सारख्याच आहेत. तर, ३६० आणि ५०४ यांचा साधारण भाजक ३६ आहे, आणि ४ पेक्षां ३६ मोठे आहेत. तर यावरून त्यांचा दृ० भा० ४ नाही. पुनः १० आणि १४ हे २ नीं भागिले जातात, असें असतां ३६ हाहि दृ० भा० नाही. यावरून कळतें कीं जेव्हां दोन संख्या त्यांचे दृ० भा० न भागाव्या, तेव्हां (९९) प्रमाणें त्यांचे भागाकारांस १ या शिवाय दुसरा कांहीं साधारण भाजक नाही. अथवा जा संख्येस मागील वाक्यांत दृ० भा० असें नाव दिलें, तें खरें नाही असें होईल.

१०१. तीन संख्यांचा दृ० भा० काढाया करितां, पहिल्यानें, पहिली आणि दुसरी या संख्यांचा दृ० भा० काढ. नंतर तो दृ० भा० आणि तिसरी संख्या, यांचा दृ० भा० काढ. कारण, पहिली आणि दुसरी या संख्यांचे सर्व साधारण भाजक मात्र दृ० भा० कांत आहेत, आणि दुसरे नाहीत. झणून पहिली, दुसरी आणि तिसरी या संख्यांशीं जे साधारण भाजक आहेत, ते मात्र तिसरी आणि पहिली, या दोन संख्यांचा दृढ भाजकांशीं साधारण आहेत, दुसरे भाजक नाहीत. तसेच रितीनें चार संख्यांचा दृ० भा० काढायाकरितां, पहिली, दुसरी, आणि तिसरी, या संख्यांचा दृ० भा० काढून, तो दृ० भा० आणि चवथी संख्या यांचा दृ० भा० काढावा.

१०२. जेव्हां एका संख्येंत दुसरी संख्या जाती, अथवा पहिली संख्या दुसरीनें निःशेष भागिली जाती, तेव्हां पहिल्या संख्येस दुस-

रीचें गुणित ह्मणतात. गुणित आणि भाजक यांचा संबंध पुढें दाखविल्याप्रमाणें आहे; ह्मणजे ४ हा २४ यांचा भाजक आहे, आणि २४ हें ४ चें गुणित आहे. ९६ हें ८, १२, २४, ४८, आणि यांखेरीज अनेक दुसऱ्या अंकांचें गुणित आहे. यामुळे ९६ यांस ८, १२, २४, ४८, इत्यादि यांचें साधारण गुणित ह्मणतात. कोणतेहि दोन संख्यांचा गुणाकार त्या दोन संख्यांचें साधारण गुणित आहे हें स्पष्ट आहे. जसे,  $३६ \times ८$ , अथवा  $२८८$  हें ३६ आणि ८ यांचें साधारण गुणित आहे. परंतु  $२८८$  पेक्षां लहान असीं, ३६ आणि ८ यांचीं साधारण गुणितें आहेत; आणि जेव्हां दोन परिमाणांचे साधारण गुणिताचें काम लागतें, तेव्हां त्यांतून अति लहान गुणित घेतल्यानें सुलभ पडतें, यासाठीं दोन संख्यांचें अति लहान गुणित\* काढण्याची रीति दाखवितों.

१०३. उदाहरण, ३६ आणि ८ या दोन संख्या घे. यांचा दृ०-भा० काढ, ह्मणजे तो ४ आहे, आणि पहा, कीं ३६ हे  $९ \times ४$ , आणि ८ हे  $२ \times ४$  आहेत. तर ३६ आणि ८ यांस त्यांचे दृ० भाजकांनै भागून त्यांचे भागाकार ९ आणि २ आहेत. हे दोन भागाकार परस्पर गुणून तो गुणाकार त्यांचे दृ० भा० ४ यांणीं गुण, ह्मणजे  $९ \times २ = ४$ , अथवा ७२ होतात. तर, (५५) प्रमाणें ८, अथवा  $४ \times २$  यांचें गुणित ७२ आहे; आणि ३६ अथवा  $४ \times ९$  यांचेंहि तेंच गुणित आहे. आणि ७२ हें ३६ आणि ८ यांचें लघुतम गुणित आहे; परंतु ही गोष्ट याजार्गीं सिद्ध करून दाखवितां येत नाहीं, कां कीं, अंकांचे जार्गीं अक्षरें कामांत आणण्याचा अधिक अभ्यासावांचून, याची सिद्धता पुरतेपणीं समजांत येणार नाहीं. वर सांगितलेल्या पक्षांत ७२ हें लघुतम साधारण गुणित आहे, यापेक्षां अधिक जाणण्याचें प्रयोजन नाहीं, आणि दुसऱ्या कोणत्याहि पक्षांत अति लहान साधारण गुणित अशे कृतीनें काढितां येईल. हेंच अति लहान साधारण गुणित आहे, असें जाणाऱ्याचें केवळ अगत्य नाहीं. कां कीं, जेव्हां कोणतेहि साधारण गुणित कामांत आणण्याचें आहे, तेव्हां अति लहानाचा जार्गीं त्याचा सारिखें दुसरें कोणतेहि साधारण गुणित कामांत घेतां येईल. अति मोठ्ये संख्येशीं काम करण्याचें चुकविण्यासाठीं मात्र दुसरीं गुणितें न घेतां, लघुतम गुणितास घेतात. लघुतम गुणितास लघुतम साधारण गुणाकारहि ह्मणतात.

अति लहान साधारण गुणित यास प्रसिद्ध चालीप्रमाणें लघुतम गुणित ह्मणतात.

जेव्हां दोन संख्यांचा दृ० भा० १ आहे, तेव्हां दोन संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार त्यांचे गुणाकाराबरोबर आहे.

लघुतम साधारण गुणाकार काढण्याची रीति; दोन संख्यांचा लघुतम गुणाकार काढायासाठी, त्यांचा दृ० भा० काढ, नंतर त्यांतून एक संख्या या दृ० भाजकानें भागून, त्या भागाकारानें दुसऱ्या संख्येस गुण, झणजे तो गुणाकार लघुतम साधारण गुणाकार आहे. तीन संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढायासाठी, आरंभी पहिल्ये दोन संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ, नंतर तो लघुतम साधारण गुणाकार, आणि तिसरी संख्या यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ, आणि याप्रमाणें पुढेहि.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

सांगीतल्या संख्या.	लघुतम साधारण गुणाकार.
१४, २१	४२
१६, ५, २४	२४०
१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०	२५२०
६, ८, ११, १६, २०	२६४०
८७६, ८६४	६३०७२
८६८, ८५४	५२९४८

अनेक संख्यांचा दृ० भा० सहज लक्षांत येतो, त्यावरून त्या संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढायास ही पुढील रीति सोईची आहे; दोन किंवा अधिक, असे साधारण भाजक जे केवळ १ यापेक्षा भागिले जातात ते घे, आणि ते वेगळाले भाजक स्थळीं मांड, आणि सांगीतल्या संख्यांतून प्रत्येक संख्येस त्या भाजकांतील एक किंवा अधिक भाजकानें भाग. ते वेगळाले भागाकार, आणि जा संख्या भागिल्या जात नाहींत त्या, त्यांचे त्यांचे खालीं मांड. नंतर खालीं घेतलेल्या अंकांशीं तसेंच पुनः पुनः कर, जोंपर्यंत त्यांतून कोणत्याहि दोन अंकांस एका वाचून कोणताहि दृ० भा० नाहीं. नंतर लघुतम साधारण गुणाकार जाणायासाठी, सर्व वेगळाले भाजक आणि खालीं आलेले सर्व अंक पर-

स्पर गुण. उदाहरण, ११ पासून २१ पर्यंत सर्व अंकांचा लघुतम सा-  
धारण गुणाकार काढायाचा असे मनांत आण.

२, २, ३, ५, ७) ११ १२ १३ १४ १५ १६ १७ १८ २९ २० २१

११ १ १३ १ १ ४ १७ ३ १९ १ १

आतां खालचे ओळीचे संख्यांस १ वांचून दुसरा कांहीं दृ० भा०  
नाहीं. तर  $२ \times २ \times ३ \times ५ \times ७ \times ११ \times १३ \times ४ \times १७ \times ३ \times १९$ , अथवा  
 $२३२७९२५६०$  हा लघुतम लाधारण गुणाकार आहे.

## पांचवा भाग.

### अपूर्णांक.

१०४. मनांत आण कीं ४९ यार्डांस ५ समभागांत भागाव-  
याचें आहे, ह्मणजे, व्यवहारी बोलण्याप्रमाणें, ४९ यार्डांचा ५ वा भाग  
काढायाचा आहे. जर ४९ यांस ५ यांणीं भागिलें, तर भागाकार  
९ येतो, आणि वर ४ राहातात; ह्मणजे, (७२) प्रमाणें, ४९ यांत ५  
वेळा ९ आणि ४ आहेत. ४९ यार्ड दाखविण्यासाठीं अब रेघ घे;

अ

ब

क ————— ऐ —

ड ————— ख —

इ ————— ल —

फ ————— म —

ग ————— न —

ऐ ख ल म न  
ह | | | | |

९ यार्ड लांबीचा अशा ५ रेघा, क, ड, इ, फ, आणि ग घे, आणि  
४ यार्ड लांबीची दुसरी ह रेघ घे. तर जा पेक्षा ४९ हे ५ वेळा ९  
आणि ४ आहेत, तर, क, ड, इ, फ, ग, आणि ह, या सर्व रेघा मिळून  
अब रेघेचा बरोबर आहेत. ह रेघ ४ यार्डांची आहे, तीस ऐ, ख, ल,

म आणि न, या ५ समभागांत भाग, आणि त्यांतून एक एक भाग, क, ड, इ, फ आणि ग, या रेघांचे बाजूस जोड. यावरून क, ड, इ, फ, ग, ऐ, ख, ल, म, न, या सर्व रेघांमिळून अब, अथवा ४९ यार्डांचे बरोबर आहेत. आतां ड रेघ आणि ख रेघ मिळून, क रेघ आणि ऐ रेघ यांचे बरोबर आहेत, त्याचप्रमाणे इ रेघ आणि ल रेघ, फ रेघ आणि म रेघ, आणि ग रेघ आणि न रेघ, या निरनिराळ्या दोन दोन रेघा क रेघ आणि ऐ रेघ यांचे बरोबर आहेत. यामुळे, क आणि ऐ या दोन रेघा मिळून ५ वेळा घेतल्या असतां, ४९ यार्ड होतील; ह्मणजे, क आणि ऐ मिळून ४९ यार्डांचा पांचवा भाग आहे.

१०५. क ही रेघ कांहीं नियमित लांबीची आहे, ह्मणजे ९ यार्ड; परंतु ऐ रेघ नव्वे जातीचें परिमाण आहे, जें अद्यापि कधीहि आढळांत आलें नव्हतें. ही रेघ पूर्ण यार्ड लांबीची नाहीं, कां कीं ४ यार्डांस ५ समभागांत विभागून, त्यांतून १ भाग घेतल्यानें ती रेघ उत्पन्न होती. ती रेघ ४ यार्डांचा पांचवा भाग आहे. तीस यार्डांचा अपूर्णांक किंवा अंश ह्मणतात. (२३) प्रमाणें त्यास  $\frac{१}{५}$  याप्रमाणें मांडितात, आणि ४९ यार्डांचा पांचवा भाग पूर्ण करायासाठीं ९ यार्डांस  $\frac{१}{५}$  हे मिळवावे लागतात.

धान्याचे ४९ मण, अथवा जमिनीचे ४९ एकर, यांस ५ समभागांत भागायास वरची कल्पना लागू होईल. पहिल्याचा पांचवा भाग, ९ मण आणि ४ मणांचा पांचवा भाग याबरोबर होईल; आणि दुसऱ्याचा पांचवा भाग ९ एकर आणि ४ एकरांचा पांचवा भाग यांचा बरोबर होईल.

सर्वांविषयीं याप्रमाणें ह्मटलें पाहिजे, कीं ४९ चा पांचवा भाग, ९ आणि  $\frac{१}{५}$ , अथवा  $९ + \frac{१}{५}$  आहे; यास  $९\frac{१}{५}$  या रितीनें मांडितात, अथवा चिन्हे कामांत घेतलीं असतां,  $\frac{४९}{५} = ९\frac{१}{५}$  असें लिहितात.

### अभ्यासासाठीं उदाहरणें.

१२३७ यांचा सत्रावा भाग काय आहे? उत्तर.  $७२\frac{१३}{१७}$   
 $\frac{१००३२}{१२७४}, \frac{६६३८१९}{२३७१०},$  आणि  $\frac{२२७७३३९९}{२४२४}$  हे काय आहेत?  
 उत्तर.  $\frac{१६२}{१२७४}, \frac{२३६४९}{२३७१०}, \frac{२३४३}{२४२४}$

१०६. अपूर्णांक या शब्दाचा अर्थ कांहीं संख्येचा भाग आहे असे समजावें, अथवा जा समभागांत एकादि संख्या विभागली आहे त्या समभागांतील कांहीं भागांची बेरीज आहे असे समजावें. जसे,



$\frac{४९}{५}, \frac{४}{५}, \frac{२०}{७}$  हे अपूर्णांक आहेत. अपूर्णांक या शब्दांत पूर्णांकांचा हि संग्रह होतो; उदाहरण,  $१७$  हे  $\frac{१७}{१}, \frac{३४}{२}, \frac{५१}{३}, ६०$  आहेत.

अपूर्णांकांतील वरचा अंकास अंश ह्मणतात, आणि खालचा अंकास छेद ह्मणतात, आणि या दोहोंस अपूर्णांकाचीं पदे ह्मणतात. जेव्हां अंश छेदापेक्षां कमी असतो, तेव्हां अपूर्णांक एकापेक्षां कमी आहे; जसें,  $\frac{६}{१७}$  हा एकापेक्षां कमी आहे; कां कीं  $६$  हे  $६$  समभागांत भागिले असतां प्रत्येक भाग  $१$  चे बरोबर आहे, आणि त्यांस  $१७$  भागांत भागिले असतां प्रत्येक  $१$  पेक्षां अगत्य कमी असावा. त्यासारखे, जेव्हां अंश आणि छेद बरोबर आहेत तेव्हां अपूर्णांक एकाचे बरोबर आहे; आणि जेव्हां अंश, छेदापेक्षां अधिक आहे तेव्हां अपूर्णांक एकापेक्षां अधिक आहे.

१०७.  $\frac{२}{३}$  याचा अर्थ  $२$  चा तिसरा भाग आहे असें जाणावे. हें आणि  $१$  चा तिसऱ्या भागाची दुप्पट हीं दोन्हीं सारखींच आहेत.

हें सिद्ध करून दाखविण्यासाठीं, दोन यार्ड लांबीची अब रेघ कर, आणि त्यांतील अक आणि कब या प्रत्येक यार्डास तीन समभागांत भाग.

अ      ड      इ      क      फ      ग      ब

तर अइ, इफ आणि फब परस्परांशीं बरोबर असतां  $२$  चा तिसरा भाग अइ आहे. यामुळे तो  $\frac{२}{३}$  आहे. परंतु अइ रेघ अड रेघेचे दुप्पट आहे, आणि अड रेघ एक यार्डाचा तिसरा भाग अथवा  $\frac{१}{३}$  आहे. यामुळे  $\frac{२}{३}$  हे  $\frac{१}{३}$  चे दुप्पट आहेत; ह्मणजे, अब रेघेची  $\frac{२}{३}$  लांबी काढा-यासाठीं, दोन यार्ड एकदांच तीन समभागांत भागून त्यांतून एक भाग घेतला, अथवा एक यार्ड तीन समभागांत भागून, त्यांतून दोन भाग घेतले, तरी कांहीं फेर होत नाही. त्याच कल्पनेवरून  $\frac{५}{६}$  हा अपूर्णांक,  $५$  हे  $८$  भागांत भागून त्यांतून एक घेतल्यानें, अथवा  $१$  कास  $८$  भागांत भागून, त्यांतून  $५$  भाग घेतल्यानें काढितां येईल. या दोनहि रिती सारख्याच आहेत, यामुळे त्यांतून जी रीति समयास सोईस पडेल, तीच या पुढे घेऊं. हें मूळ कारण या पुढीलप्रमाणें आहे; कोणतेहि संख्येचा तिसरा भाग काढण्यासाठीं, त्या संख्येंत जितके एक असतील,

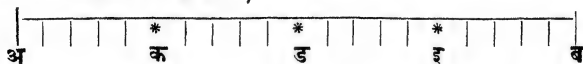
\* ५, ७, १००, इत्यादि जात एकमांचो बरोबर संख्या आहे, त्यांस पूर्णांक ह्मणतात, नेणेंकरून ते अपूर्णांकापासून भिन्न आहेत असें दाखवितां येतें.—

त्यांतील प्रत्येक एकंचा तिसरा भाग घेऊन, त्या सर्वांची बेरीज घ्यावी. जसे, २चा अथवा २ एकमाचा तिसरा भाग, त्यांतील प्रत्येक एकमाचे तिसऱ्ये भागांची बेरीज घेतल्याने निघतो, ह्मणजे,

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times २.$$

जेव्हां अंश, छेदापेक्षा अधिक असतात, तेव्हां वरचा गोष्टीपासून संशय उत्पन्न होईल; जसे,  $\frac{14}{9}$  याचा अर्थ असा होईल, कीं १ यास ७ समभागांत भागून त्यांतून १५ भाग घेण्याचे आहेत असे वाटेल. परंतु या पक्षां एकमाची संख्या असी घ्यावी, कीं त्यांतून प्रत्येक एक ७ भागांत भागिला असतां, सर्व भागांची संख्या १५ पेक्षा अधिक होईल, आणि नंतर त्या भागांतून १५ भाग घेतले असतां अपूर्णांक उत्पन्न होतो.

१०८. अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद एकाच परिमाणाने गुणिले असतां अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाही.  $\frac{3}{8}$  हा अपूर्णांक घे, त्याचे अंश आणि छेद ५ यांणीं गुणिल्याने  $\frac{15}{40}$  होतात, हा अपूर्णांक आणि  $\frac{3}{8}$  हे दोन्ही एकच आहेत; ह्मणजे, पंधरा यार्डांचा विसावा भाग आणि तीन यार्डांचा चवथा भाग हे एकच आहेत; अथवा, अपूर्णांक या शब्दाचा वर सांगितलेल्या दोन अर्थांतून दुसरा अर्थ कामांत घेतला तर, एक यार्ड २० भागांत भागून त्यांतून १५ घेतले, आणि एक यार्ड ४ भागांत भागून त्यांतून तीन घेतले, तरी लांबी सारखीच येईल. ही गोष्ट याप्रमाणे सिद्ध होती,



एक यार्ड दाखविण्यासाठीं अब रेघ कर; तीस अक, कड, डइ, आणि इब, अशा ४ समभागांत भाग, नंतर त्यांतील प्रत्येक भाग ५ समभागांत भाग. यावरून दिसते कीं अइ रेघ  $\frac{3}{8}$  आहे. परंतु पुनः लहान भाग केल्याने अब रेघ २० भागांत भागिली आहे, त्यांतील १५ भाग अइ रेघेंत येतात. तर ती अइ रेघ  $\frac{15}{40}$  आहे. यामुळे  $\frac{15}{40}$  आणि  $\frac{3}{8}$  हे एकच आहेत.

पुनः  $\frac{14}{9}$  याचे अंश आणि छेद ५ यांणीं भागून  $\frac{7}{4}$  होतात, यामुळे अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद एकच परिमाणाने भागिले असतां, त्याची किंमत बदलत नाही. हें मूळ कारण अंकगणितांत सर्वत्र फार उपयोगी पडते, आणि व्यवहारी बोलण्यांतहि ते फार येते, कां कीं २१

सांतून १४ हे, ३ तून २ घेतल्या बरोबर आहेत, असें बहुतकरून ह्मणतात.

१०९.  $\frac{3}{8}$  आणि  $\frac{15}{20}$  या दोन अपूर्णाकांची किंमत जरी बरोबर आहे, आणि त्यांतून कोणताहि एक दुसऱ्याचे जागीं चुकीवांचून कामांत घेतां येईल, तथापि दुसऱ्यापेक्षां पहिला कामांत आणायस सोईस पडतें, कां कीं १५ यार्डांचा २० वा भाग यापासून जो बोध होतो, त्यापेक्षां तीन यार्डांचा चवथा भाग यापासून अधिक बोध होतो, ह्मणून तो केवळ सोईचा आहे इतकेंच नाहीं, परंतु पहिल्या अपूर्णाकाचे अंक फार लहान आहेत, ह्मणून गुणाकार आणि भागाकार करायस सुलभ पडतें, या कारणावरून तो अपूर्णाक फार करून घेतात. याजकरितां जेव्हां कांहीं अपूर्णाक सांगितला आहे, त्याचे अंश आणि छेद यांस कांहीं साधारण भाजक किंवा दृढभाजक आहे कीं नाहीं हें पहावें. (९८) वे कलमांत कोणतेहि दोन संख्यांचा दृढभाजक काढण्याची रीति सांगितली, आणि असें दाखविलें आहे, कीं जर कोणत्याहि दोन संख्या त्यांचे दृढभाजकानें भागिल्या, तर त्यांचा भागाकारास १ शिवाय दुसरा कोणताहि दृढभाजक नाहीं. अपूर्णाकाचा पदांचा दृढभाजक काढून त्याणें तीं पदे भाग, तर असें केल्यानें त्या अपूर्णाकाचें अतिसंक्षेपरूप झालें असें ह्मणतात, आणि त्याचे या रूपानें त्याचे किंमतीचा बोध चांगला होतो.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या प्रत्येक अपूर्णाकापुढें त्याचें अतिसंक्षेपरूप लिहिलें आहे.

$$\begin{array}{rcl} \frac{2998}{2929} & = & \frac{22 \times 127}{23 \times 127} = \frac{22}{23} \\ \frac{2966}{8920} & = & \frac{19 \times 156}{30 \times 156} = \frac{19}{30} \\ \frac{93206}{13966} & = & \frac{968 \times 122}{113 \times 122} = \frac{968}{113} \\ \frac{666600}{80349600} & = & \frac{22 \times 80800}{999 \times 80800} = \frac{22}{999} \\ \frac{94869}{349968} & = & \frac{121 \times 784}{846 \times 784} = \frac{121}{846} \end{array}$$

११०. अपूर्णांकाचीं पदे गुण्यगुणकरूपानें सांगितलेलीं असतात, तेव्हां अंशांतील एक गुण्यगुणक आणि छेदांतील एक गुण्यगुणक, हे एका अंकानें भागितां येतील तर त्यांस त्या अंकानें भागावें. ही गोष्ट (८८) आणि (१०८) कलमांपासून उत्पन्न होती. पुढील उदाहरणांत जे अंक भागाकारानें बदलतात, त्यांवर स्वर चिन्हें केलीं आहेत.

$$\begin{aligned}\frac{१२ \times ११ \times १०}{२ \times ३ \times ४} &= \frac{३ \times ११ \times १०}{२ \times ३ \times १} = \frac{१' \times ११ \times ५'}{१' \times १' \times १'} = ५५. \\ \frac{१८ \times १५ \times १३}{२० \times ५४ \times ५२} &= \frac{२' \times ३' \times १'}{४' \times ६' \times ४'} = \frac{१' \times १' \times १'}{२' \times २' \times ४'} = \frac{१}{१६}. \\ \frac{२७ \times २८}{९ \times ७०} &= \frac{३' \times ४'}{१' \times १०'} = \frac{३' \times २'}{१' \times ५'} = \frac{५}{६}.\end{aligned}$$

१११. (१०८) प्रमाणें किंमत बदलल्यावांचून, कोणत्याहि अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद कोणत्याहि संख्येनें गुणितां येतात, यावरून दोन अपूर्णांकांस दुसऱ्या दोन अपूर्णांकांचें रूप देतां येतें, असें कीं दुसऱ्यांची किंमत पहिल्यांचे बरोबर असून, त्यांचे छेद सारिखेच होतील. उदाहरण,  $\frac{२}{३}$  आणि  $\frac{४}{६}$ ;  $\frac{२}{३}$  याचीं दोन्हीं पदे ७ यांणीं गुण, आणि  $\frac{४}{६}$  याचीं दोन्हीं पदे ३ यांणीं, गुण यावरून असें दिसतें, कीं

$$\frac{२}{३} \text{ हे } \frac{२ \times ७}{३ \times ७} \text{ अथवा } \frac{१४}{२१} \text{ आहेत.}$$

$$\frac{४}{६} \text{ हे } \frac{४ \times ३}{६ \times ३} \text{ अथवा } \frac{१२}{२१} \text{ आहेत.}$$

एथें तर  $\frac{१४}{२१}$  आणि  $\frac{१२}{२१}$  असे दोन अपूर्णांक आहेत, आणि त्यांचे छेद २१ सारिखेच असून, त्यांची किंमत  $\frac{२}{३}$  आणि  $\frac{४}{६}$  यांचे बरोबर आहे; या पक्षांत  $\frac{२}{३}$  आणि  $\frac{४}{६}$  हे समछेद झाले असें झणतात.

$\frac{१}{१०}$ ,  $\frac{५}{६}$  आणि  $\frac{९}{६}$  हे समछेद करावयाचे आहेत असें मनांत आण. पहिल्या अपूर्णांकाचीं दोन्हीं पदे ६ आणि ९ यांचे गुणाकारानें गुण; दुसऱ्याचीं १० आणि ९ यांचे गुणाकारानें गुण; आणि तिसऱ्याचीं १० आणि ६ यांचे गुणाकारानें गुण. तेव्हां (१०८) प्रमाणें असें दिसतें कीं

\* जी संख्या दुसऱ्या संख्येस निःशेष भागिता, तीस दुसऱ्याचा गुण्य किंवा गुणक झणतात; जसे ४, ६, ८, हे २४ चे गुण्य किंवा गुणक आहेत, आणि ६×४, ८×३, २×२×२×३, आणि दुसऱ्या कित्येक तऱ्हांनीं २४ चें गुण्य गुणकांत पृथक्करण होतें.

$$\frac{१}{१०} \text{ हे } \frac{१ \times ६ \times ९}{१० \times ६ \times ९} \text{ अथवा } \frac{५४}{५४०} \text{ आहेत,}$$

$$\frac{५}{६} \text{ हे } \frac{५ \times १० \times ९}{६ \times १० \times ९} \text{ अथवा } \frac{४५०}{५४०} \text{ आहेत,}$$

$$\frac{७}{९} \text{ हे } \frac{७ \times ७० \times ६}{९ \times १० \times ६} \text{ अथवा } \frac{४२०}{५४०} \text{ आहेत,}$$

शेवटींचे अपूर्णांक पाहून, असें दिसते कीं त्यांचे सर्व अंश आणि समछेद, ६ यांणीं भागिले जातात, आणि (१०८) प्रमाणें भागिल्यानें त्यांची किंमत बदलत नाहीं.  $\frac{५४}{५४०}, \frac{४५०}{५४०}$  आणि  $\frac{४२०}{५४०}$  यांचे अंश आणि छेद ६ यांणीं भागून  $\frac{९}{१०}, \frac{७५}{९०}$  आणि  $\frac{७०}{९०}$  असे अपूर्णांक येतात. हे समछेद अपूर्णांक आहेत, आणि  $\frac{१}{१०}, \frac{५}{६}$  आणि  $\frac{७}{९}$  यांसारखेच आहेत, आणि यामुळे ते पहिल्या अपूर्णांकांपेक्षा सरळ आहेत. आणखी पहा कीं ५४० हे १०, ६, ९, अथवा  $१० \times ६ \times ९$  यांचें, एक साधारण गुणित आहे, परंतु (१०३) प्रमाणें १०, ६, आणि ९ यांचें लघुतम साधारण गुणित ९० आहे. यामुळे, ही पुढील कृति वरचे कृतीपेक्षा बरी आहे.  $\frac{१}{१०}, \frac{५}{६}$  आणि  $\frac{७}{९}$  यांची किंमत बदलल्यावांचून समछेद करायासाठीं, पहिल्यानें, (१०३) कलमाचे रितीप्रमाणें, १०, ६, ९, यांचें लघुतम साधारण गुणित काढ, तें ९० आहे. पहा कीं ९० यांत १०, ६, आणि ९, हे वेगवेगळे ९, १५, आणि १० वेळा जातात. तर पहिल्या अपूर्णांकाचीं दोन्ही पदे ९ नीं गुण, दुसऱ्याचीं १५ नीं गुण, आणि तिसऱ्याचीं १० नीं गुण, ह्मणजे  $\frac{९}{९०}, \frac{७५}{९०}, \frac{७०}{९०}$  असे अपूर्णांक पूर्वीप्रमाणेंच येतात.

सांगितलेल्या अंकांत कदाचित् पूर्णांक असला, तर त्यास अपूर्णांकाचें रूप देतां येऊन, दुसऱ्याशीं समछेद (१०६) कलमाचे रितीप्रमाणें करितां येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

सांगितले अपूर्णांक

समछेद झालेले.

$\frac{२}{३}$	$\frac{१}{५}$	$\frac{१}{६}$			
$\frac{१}{३}$	$\frac{२}{७}$	$\frac{३}{१४}$	$\frac{१२}{२१}$	$\frac{३}{४}$	
३	$\frac{४}{१०}$	$\frac{५}{१००}$	$\frac{९}{१०००}$		
	$\frac{३३}{३७९}$	$\frac{२८१}{६७७}$			
			$\frac{२०}{३०}$	$\frac{६}{३०}$	$\frac{५}{३०}$
			$\frac{२८}{८४}$	$\frac{२४}{८४}$	$\frac{१८}{८४}$
			$\frac{४८}{८४}$	$\frac{४८}{८४}$	$\frac{६३}{८४}$
			$\frac{३०००}{१०००}$	$\frac{४००}{१०००}$	$\frac{५०}{१०००}$
					$\frac{६}{१०००}$
			$\frac{२२३४१}{२५६५८३}$	$\frac{१०६४९९}{२५६५८३}$	

११२. दोन अपूर्णाकांस समछेद केल्यानें, त्यांस ताडून पहातां येतें; ह्मणजे, दोहोंतून कोणता मोठा आणि कोणता लहान हें सांगतां येतें. उदाहरण,  $\frac{1}{2}$  आणि  $\frac{9}{14}$  घे. यांची किंमत न बदलतां समछेद करून,  $\frac{14}{30}$  आणि  $\frac{18}{30}$  निघतात. यांतून पहिला अगत्य मोठा असावा, कां कीं (१०७) प्रमाणें एकास ३० समभागांत भागिल्यानें, आणि यांतून १५ घेतल्यानें तो अपूर्णाक होतो, परंतु त्याच समभागांतून १४ घेतल्यानें मात्र दुसरा होतो.

दोन अपूर्णाकांस समछेद असले तर जास मोठा अंश आहे तो यांतून मोठा आहे; आणि जा दोन अपूर्णाकांस सारिखेच अंश असतील, यांतील जास लहान छेद आहे तो मोठा हें स्पष्ट आहे. जसें  $\frac{६}{६}$  पेक्षां  $\frac{६}{६}$  मोठे आहेत, कां कीं पहिला ८ चा १ नवमांश, आणि दुसरा ८ चा १ सप्तमांश आहे. पुनः, छेद हवा तेवढा वाढविल्यानें, कोणताहि अंश हवातेवढा लहान अपूर्णाकाचा आहे असें करितां येईल. जसें, (१०८) प्रमाणें  $\frac{१००}{१०००}$  हे  $\frac{१}{१०}$  आहेत,  $\frac{१००}{१००००}$  हे  $\frac{१}{१००}$  आहेत, आणि  $\frac{१०}{१०००००००}$  हे  $\frac{१}{१००००००}$  आहेत.

आतां,  $\frac{१}{२}$  यास  $\frac{७}{१५}$  मिळवितां येतील किंवा यांतून वजा करितां येतील. कां कीं पहिला अपूर्णाक हा, १ याचे ३० समभागांतील १५ भाग आहेत. दुसरा अपूर्णाक त्या समभागांतील १४ भाग आहेत. यामुळे त्या दोहोंची बेरीज १५+१४, अथवा त्या समभागांतून २९ भाग अगत्य असावी; ह्मणजे,  $\frac{१}{२} + \frac{७}{१५}$  हे  $\frac{२९}{३०}$  आहेत. त्या दोहोंची वजाबाकी १५-१४, अथवा त्या समभागांतून १ भाग अगत्य असावी; ह्मणजे,  $\frac{१}{२} - \frac{७}{१५} = \frac{१}{३०}$ .

११३. मागील दोन कलमांपासून या पुढील रिती निघतात;

**पहिल्यानें.** अपूर्णाकांस ताडून पहायासाठीं, त्यांची बेरीज, किंवा वजाबाकी करायासाठीं, पहिल्यानें त्यांस समछेद कर. असें केल्यानंतर जास मोठा अंश आहे, तोच त्यांतील मोठा अपूर्णाक आहे.

त्या दोन अपूर्णाकांचे बेरिजेचा अंश, त्या दोन अपूर्णाकांचे अंशांची बेरीज आहे, आणि समछेद त्या बेरिजेचा छेद आहे.

त्यांचे वजाबाकीचा अंश त्यांचे अंशांचे वजाबाकी बरोबर आहे, आणि समछेद त्यांचे वजाबाकीचा छेद आहे.

## अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} &= \frac{43}{60} & \frac{88}{3} - \frac{143}{829} &= \frac{10329}{1269} \\ 1 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000} &= \frac{1038}{1000} & 2 - \frac{1}{6} + \frac{12}{13} &= \frac{243}{78} \\ \frac{1}{2} + \frac{6}{16} + \frac{18}{100} &= \frac{3}{2} & \frac{163}{429} - \frac{97}{609} &= \frac{93066}{849009} \end{aligned}$$

११४. मनांत आण, कीं एक पूर्णांक अपूर्णाकासीं मिळवायाचा आहे, जसे ६ हे  $\frac{5}{8}$  यांस मिळवायाचे आहेत. (१०६) प्रमाणें ६ हे  $\frac{58}{8}$  आहेत, आणि  $\frac{58}{8} + \frac{5}{8}$  हे  $\frac{63}{8}$  आहेत; म्हणजे, ६ +  $\frac{5}{8}$ , अथवा मांडण्याचे चालीप्रमाणें  $६\frac{5}{8}$ , हे  $\frac{63}{8}$  आहेत, या पक्षांत रीति हीच आहे; पूर्णाकास अपूर्णाकाचे छेदानीं गुण, आणि त्या गुणाकारास अपूर्णाकाचे अंश मिळीव; ही बेरीज उत्तराचे अंश होतील, आणि अपूर्णाकाचे छेद उत्तराचे छेद होतील. जसें,  $३\frac{1}{8} = \frac{13}{8}$ ,  $२२\frac{4}{5} = \frac{१०३}{५}$ ,  $७४\frac{३}{५५} = \frac{४०७२}{५५}$ . ही रीति (१०५) कलमांतील रीतीचे उलटी आहे.

११५. मागील रीतीपासून असें दिसतें कीं  $१७२३\frac{२०७}{१००००}$  हे  $\frac{१७२३०९०७}{१००००}$  आहेत,  $६६७\frac{२२५}{१०००}$  हे  $\frac{६६७२२५}{१०००}$  आहेत, आणि  $२३\frac{९९}{१०००००}$  हे  $\frac{२३०००९९}{१०००००}$  आहेत. यावरून जेव्हां कोणताहि पूर्णांक अशे अपूर्णाकास मिळवायाचा आहे, कीं जाचें छेदस्थळां १ आणि त्यावर काहीं शून्यें पेटात, आणि त्या शून्यांची संख्या त्या अपूर्णाकाचे अंशांतील अंकांचे संख्येपेक्षां कमी नाहीं, तर या पुढील रीतीनें कर; पहिल्यानें पूर्णांक मांड, नंतर त्याचे उजव्येकडेस अपूर्णाकाचे अंश मांड, आणि अंशांतील अंक संख्येपेक्षां जितकी छेदांतील शून्यांची संख्या अधिक असेल, तितकी शून्यें त्या दोहों अंकांचे मध्ये मांड. असें केल्यानें उत्तराचा अंश निघतो, आणि अपूर्णाकाचा जो छेद तोच त्या उत्तराचा छेद आहे. जर छेदस्थळांतील शून्यांची संख्या अंश स्थळांतील अंक संख्येचे बरोबर असेल, तर पूर्णांक आणि अपूर्णाकाचा अंशाचे अंक यांमध्ये काहीं शून्यें मांडू नको.

## अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

$१\frac{२३७०७}{१०००००}$ ,  $२४५७\frac{६}{१०}$ ,  $१२०७\frac{२९९}{१०००००००}$ , आणि  $२३३\frac{२२१०}{१०००००}$ , या मिश्रसंख्यांस अपूर्णाकांचें रूप दे.

११६. मनांत आण, कीं  $\frac{३}{४}$  यांस ४ नीं गुणायचे आहे. (४८)

प्रमाणे  $\frac{३}{४}$  हे ४ वेळा घेण्याचे आहेत; ह्मणजे,  $\frac{३}{४} + \frac{३}{४} + \frac{३}{४} + \frac{३}{४}$  हे आहेत. (११२) प्रमाणे यांची बेरीज  $\frac{९}{४}$  आहे; यावरून अपूर्णांकास पूर्णांकाने गुणायाची रीति हीच कीः अपूर्णांकाचे अंश पूर्णांकाने गुण, आणि त्याचे छेद तसेच राहू दे.

११७. पूर्णांकाने अपूर्णांक गुणायाचा असल्यास, त्या पूर्णांकाने जर अपूर्णांकाचे छेद निःशेष भागिले जातात, तर या पुढीलप्रमाणे रीति आहे. अपूर्णांकाचे छेद पूर्णांकाने भाग, आणि त्याचे अंश तसेच राहू दे. उदाहरण,  $\frac{९}{३६}$  यांस ६ नीं गुणायाचे आहे. तर (११६) प्रमाणे  $\frac{९}{३६} \times ६ = \frac{९२}{३६}$  आहेत, यांत अंश आणि छेद ६ यांनी भागिले जातात, तर (१०८) प्रमाणे ते आणि  $\frac{९}{६}$  हे बरोबरच आहेत. तर स्पष्ट होतें, कीं वर सांगितलेल्या रीतिप्रमाणे  $\frac{९२}{३६}$  यापासून  $\frac{९}{६}$  हे उत्पन्न होतात.

११८. दुसऱ्या संख्येत जितके एक आहेत, तितक्या वेळा कांहीं संख्या घेणें ही गुणाकार कृति आहे असें पूर्वी दाखविलें. जसें १२ यांस ७ नीं गुणायाचें, ह्मणजे ७ यांत जितके एक आहेत तितक्या वेळा १२ घेणें आहेत, अथवा ७ होण्याकरितां जितक्यावेळा १ घ्यावा लागतो, तितक्या वेळा १२ घेण्याचे आहेत. जसें, ७ होण्याकरितां १ या अंकाशीं जी कृती करावी लागती तीच कृती ७ वेळा १२ होण्याकरितां १२ या अंकाशीं केली पाहिजे. उदाहरण,

७ हे १+१+१+१+१+१+१.

७ वेळा १२ हे १२+१२+१२+१२+१२+१२+१२.

दोन अपूर्णांकांशीं अशीच कृति केली, तरी फळास गुणाकार ह्मणतात, आणि या कृतीसहि गुणाकार ह्मणतात. यांत इतकाच भेद, कीं पूर्णांक करायासाठीं १ कांहीं वेळा घ्यावा लागतो, परंतु अपूर्णांक करायासाठीं १ यास कांहीं समभागांत भागून त्यांतील एक समभागास तोच भाग कांहीं वेळा मिळावा लागतो. गुणाकार या शब्दाचा वर सांगितलेला अर्थ अपूर्णांकास लाविला असतां,  $\frac{३}{४}$  यांस  $\frac{९}{४}$  नें गुणिलें तर काय होतें ?  $\frac{९}{४}$  हे करायासाठीं जें काम १ शीं केलें तेंच काम  $\frac{३}{४}$  यांशीं केलें पाहिजे; परंतु  $\frac{९}{४}$  करायासाठीं, १ यास आठ समभागांत भागून, त्यांतून ७ घेतले आहेत. यामुळे,  $\frac{३}{४} \times \frac{९}{४}$  हे करायासाठीं,  $\frac{३}{४}$  यांस आठ समभागांत भागून, त्यांतून ७ घेतले पाहिजेत. आतां (१०८) प्रमाणे  $\frac{३}{४}$  आणि  $\frac{३४}{३२}$  सारखेच आहेत.  $\frac{३४}{३२}$  हे करायास १ हा ३२ समभागांत,



भागून, त्यांतून २४ भाग, अथवा त्यांतून ३ भाग ८ वेळा घेतले, जर  $\frac{२४}{३२}$  यांस ८ समभागांत भागिलें, तर त्यांतील प्रत्येक भाग  $\frac{३}{३२}$  आहे; आणि जर त्यांतून ७ भाग घेतले, तर (११६) प्रमाणें  $\frac{२१}{३२}$  उत्पन्न होतात; यामुळें  $\frac{३}{४}$  यांस  $\frac{७}{८}$  यांणीं गुणिलें, तर  $\frac{२१}{३२}$  उत्तर आहे; आणि ही कल्पना दुसऱ्या कोणतेहि अपूर्णाकांस लागू होईल. परंतु  $\frac{२१}{३२}$  हे  $\frac{३}{४}$  आणि  $\frac{७}{८}$  यांपासून याप्रमाणें होतात, ह्मणजे, त्यांचे दोन अंश परस्पर गुणून अंश होतो, आणि त्या दोहोंचे छेद परस्पर गुणून छेद होतो; ह्मणजे यापासून अपूर्णाकाचा गुणाकार करायाची रीति निघती.

११९.  $\frac{२१}{३२}$  हा गुणाकार तिसऱ्या अपूर्णाकानें गुणायचा असेल, जसें  $\frac{५}{८}$  यांणीं, तर तसेच रितीनें,  $\frac{१०५}{२८८}$  हें फळ आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यामुळें भलत्या कांहीं अपूर्णाकाचा गुणाकार करायाची ही पुढील सामान्य रीति आहे.

अंश करायासाठीं वेगळाले अंश परस्पर गुण, आणि छेद करायासाठीं वेगळाले छेद परस्पर गुण.

१२०.  $\frac{१५}{१६}$  आणि  $\frac{८}{१०}$  हे परस्पर गुणायचे आहेत असें मनांत आण. यांचो गुणाकार या पुढीलप्रमाणें मांडावा;  $\frac{१५ \times ८}{१६ \times १०}$  ह्मणजे,  $\frac{१२०}{१६०}$ , आणि या अपूर्णाकास (१०९) प्रमाणें अतिसंक्षेपरूप देऊन  $\frac{३}{४}$  होतील. १५ आणि १० हे दोन्हीं ५ नीं भागिले जातात, आणि ८ आणि १६ हे दोन्हीं ८ नीं भागिले जातात, आणि सांगितला अपूर्णाक  $\frac{३ \times ५ \times ८}{२ \times ८ \times २ \times ५}$  या रितीनें मांडितां येतो. ही सगळी गोष्ट मनांत धरून वरचें उत्तर लागलेंच निघतें. याचे अंश आणि छेद या दोहोंस (१०८) आणि (८७) प्रमाणें  $५ \times ८$  यांणीं भागिलें असतां, लागलेच  $\frac{३}{४}$  उत्पन्न होतात; यामुळें, अनेक अपूर्णाक गुणायचे पूर्वी, जर त्यांतील एका अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद, अथवा एकाचे अंश आणि दुसऱ्याचे छेद, यांस जर साधारण भाजक असेल, तर त्यांस त्या साधारण भाजकानें भागून, त्यांचा भागाकार त्यांचे भाज्यांचे स्थळीं कृति करायास कामांत घे.

पूर्णाकाला अपूर्णाकाचें रूप देणें, तर छेदस्थळीं १ लिहिल्यानें अपूर्णाक होतो असें कल्पावें; जसें, १६ हे (१०६) प्रमाणें  $\frac{१६}{१}$  आहे; आणि एक किंवा अधिक पदे जेव्हां पूर्णाक असतात, त्यांस हीच रीति लागू होईल.

## अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$$\frac{१३६}{७४७०} \times \frac{२६८}{९१९} = \frac{३६४४८}{६८६४९३०} = \frac{१८२२४}{३४३२४६५}$$

$$\frac{१}{२} \times \frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{४}{५} = \frac{१}{५},$$

$$\frac{२}{१७} \times \frac{१७}{४५} = \frac{२}{४५}$$

$$\frac{२}{५९} \times \frac{१३}{७} \times \frac{२४१}{१९} = \frac{६२६६}{७८४७}.$$

$$\frac{१३}{४६१} \times \frac{६०१}{११} = \frac{७८१३}{५०७१}$$

सांगितले अपूर्णांक.

वर्ग.

घन.

$$\frac{७०१}{१५८}$$

$$\frac{४९१४०१}{२४९६४}$$

$$\frac{३४४४७२१०१}{३९४४३१२}$$

$$\frac{१४०}{१४१}$$

$$\frac{१९६००}{१९८८१}$$

$$\frac{२७४४०००}{२८०३२२१}$$

$$\frac{३५५}{११३}$$

$$\frac{१२६०२५}{१२७६९}$$

$$\frac{४४७३८८७५}{१४४२८९७}$$

भूमीचे १०० एकरांतून, त्यांचे  $\frac{२}{३}$  वजाकरून, बाकीला ५० एकर मिळवून, नंतर त्या बेरिजेचे  $\frac{१}{६}$  काढून उत्तर काय होईल ? उत्तर,  $५९ \frac{११}{२१}$ .

१२१. एक पूर्णांक दुसऱ्या पूर्णांकानें भागणें, ह्मणजे १०८ यांस ९ यांणीं भागणें, तर पहिल्यानें याप्रमाणें प्रश्न उत्पन्न होतो, अनेक नवांचे बेरिजेनें, १०८ उत्पन्न होतील कीं काय ? जर होतील, तर किती वेळा ९ घेतले पाहिजेत ?

मनांत आण, कीं  $\frac{२}{३}$  आणि  $\frac{४}{६}$ , असे दोन अपूर्णांक घेतले, आणि याप्रमाणें विचारिलें, कीं  $\frac{४}{६}$  यांस अनेक समभागांत भागून, त्या अनेक भागांची बेरीज करून,  $\frac{२}{३}$  हे उत्पन्न होतील कीं काय ? होतील, तर  $\frac{४}{६}$ , यांस किती समभागांत भागावें, आणि त्यांतून कितीकांची बेरीज घेतली पाहिजे ? या प्रश्नाचा उलगडण्यास  $\frac{२}{३}$  यांस  $\frac{४}{६}$  यांणीं भागणें असें ह्मणतात ; आणि  $\frac{४}{६}$  यांचे जे भाग केले आहेत ती भागसंख्या छेदस्थळीं, आणि त्या भागांतून जितके भाग घेतले, ती भागसंख्या अंशस्थळीं मांडल्यानें जो अपूर्णांक होतो, त्यास  $\frac{२}{३} \div \frac{४}{६}$  यांचा भागाकार ह्मणतात. अशा प्रश्नाचें उलगडणें या पुढील प्रमाणें आहे ; (१११) प्रमाणें या दोन अपूर्णांकांस समछेद कर, ह्मणजे (१०८) प्रमाणें त्यांची किंमत बदलत नाहीं ; त्यांचीं रूपें तर  $\frac{१०}{१५}$  आणि  $\frac{१२}{१५}$  होतात. तर आतां प्रश्न हाच आहे, कीं  $\frac{१२}{१५}$  यांस कांहीं समभागांत भागून, त्या भागांतून कांहीं भाग घेऊन,  $\frac{१०}{१५}$  उत्पन्न करावे. १ यास १५ समभागांत भागून त्यांतून १२ घेतल्यानें  $\frac{१२}{१५}$  उत्पन्न होतात, तर  $\frac{१२}{१५}$  यांस १२ समभागांत

भागिलें असतां, खांतील प्रत्येक भाग  $\frac{1}{96}$  होईल; आणि तसे १० भाग घेतले, तर  $\frac{10}{96}$  उत्पन्न होतील. यामुळे,  $(१०८)$  प्रमाणें,  $\frac{10}{96}$  किंवा  $\frac{5}{48}$  यांस उत्पन्न करायासाठीं  $\frac{12}{96}$  किंवा  $\frac{1}{8}$  यांस १२ समभागांत भागून, त्यांतून १० घेतले पाहिजेत; ह्मणजे,  $\frac{10}{96}$  हा भागाकार आहे. जर पूर्वीप्रमाणें  $\frac{2}{3}$  यांस भाज्य, आणि  $\frac{1}{8}$  यांस भाजक ह्मणतात, तर या पक्षांत भागाकार या पुढील रितीपासून निघतो, आणि लक्षांत येईल, कीं ही कल्पना सर्व दुसऱ्या पक्षांसहि लागू होईल:

भाज्याचा अंश गुणिला भाजकाचा छेद, याचे बरोबर भागाकाराचा अंश आहे. आणि भाज्याचा छेद गुणिला भाजकाचा अंश, याचे बरोबर भागाकाराचा छेद आहे. या दोन्ही पक्षांत काय उत्तर यावें हें ताडून पाहिल्यानें ही रीति गुणाकाराचे रितीची उलट आहे हें लक्षांत येईल.  $\frac{1}{8}$  यांस  $\frac{10}{96}$  यांनीं गुणयाचें, तर या पुढील प्रमाणें प्रश्न होतो, जर  $\frac{1}{8}$  याचे १२ भाग करून, खांतून १० भाग घेतले, तर एकमात्रा किती भाग घेतला आहे? याचें उत्तर  $\frac{10}{96}$ , किंवा  $\frac{5}{48}$  आहे. पुनः,  $\frac{2}{3}$  यांस  $\frac{1}{8}$  यांनीं भागणें, तर या पुढीलप्रमाणें प्रश्न होतो,  $\frac{2}{3}$  हे  $\frac{1}{8}$  यांचा कोणता भाग आहे? याचें उत्तर  $\frac{10}{96}$ .

१२२. ही रीति केव्हां केव्हां सुलभ करितां येईल, असें या पुढील उदाहरणापासून समजेल.  $\frac{10}{33}$  यांस  $\frac{20}{99}$  यांनीं भाग. पहा कीं १६ हे  $४ \times ४$  आहेत, आणि २८ हे  $४ \times ७$  आहेत; ३३ हे  $३ \times ११$  आहेत, आणि १५ हे  $३ \times ५$  आहेत; यामुळे ते दोन अपूर्णांक  $\frac{४ \times ४}{३ \times ११}$  आणि  $\frac{४ \times ७}{३ \times ५}$  या प्रमाणें आहेत, आणि रितीप्रमाणें त्यांचा भागाकार  $\frac{४ \times ४ \times ३ \times ५}{३ \times ११ \times ४ \times ७}$  आहे, अंश आणि छेद या दोहोंतहि  $३ \times ४$  आहेत. यावरून  $(१०८)$  प्रमाणें तो अपूर्णांक  $\frac{४ \times ५}{११ \times ७}$ , अथवा  $\frac{२०}{७७}$  यांचे बरोबर आहे. यावरून वरचे कलमांतील रितींत या पुढीलप्रमाणें फेर करितां येतो; दोन अंश अथवा दोन छेद यांस जर साधारण भाजक असेल, तर त्याणें ते भागून भाज्यांचे स्थळीं भागाकार कामांत घ्यावे.

१२३. अपूर्णांकास पूर्णांकानें भागते समर्प्या, जसें,  $\frac{2}{3}$  यांस १५ नीं भागते समर्प्या, १५ हे  $\frac{1}{9}$  याप्रमाणें अपूर्णांक आहेत असें जाणावें. ह्मणजे रितीप्रमाणें  $\frac{2}{3}$  हा भागाकार येतो. यावरून अपूर्णांकास पूर्णांकानें भागयाचें असेल, तर अपूर्णांकाचे छेदास पूर्णांकानें गुणावें.

## अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

भाज्य.	भाजक.	भागाकार.
$\frac{४१}{३३}$	$\frac{६३}{११}$	$\frac{४१}{१८९}$
$\frac{४६७}{१५१}$	$\frac{९०७}{१०१}$	$\frac{४७१६७}{१३६९५७}$
$\frac{७८१३}{५०७१}$	$\frac{६०१}{११}$	$\frac{१३}{४६१}$
$\frac{\frac{१}{५} \times \frac{१}{५} \times \frac{१}{५} - \frac{२}{१७} \times \frac{२}{१७} \times \frac{२}{१७}}{\frac{१}{५} - \frac{२}{१७}},$ आणि $\frac{\frac{६}{११} \times \frac{६}{११} - \frac{३}{११} \times \frac{३}{११}}{\frac{६}{११} - \frac{३}{११}}$ यांचा किंमती काय?		

उत्तरें,  $\frac{५५९}{७२२५}$ , आणि १.

कोणी पुरुष अ, एक शेत १२ दिवसांत कापितो, तेंच शेत ब, ६ दिवसांत कापितो, आणि क, तेंच शेत ४ दिवसांत कापितो; तर ते सगळे मिळून तें शेत किती दिवसांत कापतील?† उत्तर, २ दिवसांत.

एक टांक्यास ४ नळ आहेत, आणि ते प्रत्येक निरनिराळे सोडिले असतां १२, ११, १०, आणि ९ तासांत तें टाकें भरितात, तर ते सगळे एकदांच सोडिले असतां किती काळांत भरतील? उत्तर,  $२\frac{४५४}{७६३}$  तास.

१२४. या अध्यायांतील मुख्य परिणाम बीजगणितानें या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येईल; अ, ब, क, इत्यादि कोणत्याहि पूर्णांकांचे स्थळीं घेतले आहेत असें मनांत आण. तर

$$\begin{aligned}
 (१०७) \text{ प्रमाणें } \frac{अ}{ब} &= \frac{१}{ब} \times अ & (१०८) \text{ प्रमाणें } \frac{अ}{ब} &= \frac{मअ}{मब} \\
 (१११) \text{ प्रमाणें } \frac{अ}{ब} \text{ आणि } \frac{क}{उ} \text{ हे } &- - - \frac{अउ}{बउ} \text{ आणि } \frac{बक}{बउ} \text{ याप्रमाणें आहेत} \\
 (११२) \text{ प्रमाणें } \frac{अ}{क} + \frac{ब}{क} &= \frac{अ+ब}{क} & \frac{अ}{क} - \frac{ब}{क} &= \frac{अ-ब}{क} \\
 (११३) \text{ प्रमाणें } \frac{अ}{ब} + \frac{क}{उ} &= \frac{अउ+बक}{बउ} & \frac{अ}{ब} - \frac{क}{उ} &= \frac{अउ-बक}{बउ}
 \end{aligned}$$

† हें आणि पुढील उदाहरणें करण्याची रीति याप्रमाणें आहे: प्रत्येक मनुष्य जितके दिवसांत शेत कापितो त्या दिवसांची संख्या जर दिली आहे, तर प्रत्येक मनुष्य त्या शेताचा किती भाग एक दिवसांत कापील हें काढितां येईल, आणि त्यावरून सगळे मिळून एक दिवसांत किती कापतील हें कळेल; नंतर, तें सर्व काम करण्यास त्या सर्व मनुष्यांस किती दिवस लागतील हें काढितां येईल.

$$(११८) \text{ प्रमाणे } \frac{अ}{ब} \times \frac{क}{उ} = \frac{अक}{बउ} \quad (१२१) \text{ प्रमाणे } \frac{अ}{ब} \text{ भागिला } \frac{क}{उ}$$

$$\text{अथवा } \frac{\frac{अ}{ब}}{\frac{उ}{क}} = \frac{अउ}{बक}$$

१२५. जरीं अक्षरे अपूर्णाकांचे जागीं घेतलीं तरी, हीं वरचीं उत्तरे खरीं आहेत. उदाहरण,  $\frac{\frac{अ}{ब}}{\frac{उ}{क}}$  हा अपूर्णांक घे, याचे अंश आणि छेद

अपूर्णांक आहेत, आणि त्यांस  $\frac{इ}{फ}$  या अपूर्णाकानें गुण, त्यापासून  $\frac{\frac{अउ}{बक}}{\frac{उफ}{कइ}}$  असें होतें, हें (१२१) प्रमाणें  $\frac{अउउफ}{बककइ}$  आहे, याचे अंश आणि छेद यांस (१०८) प्रमाणें इफ यांणीं भागिलें असतां,  $\frac{अउ}{बक}$  होतो. परंतु मुळाचा

अपूर्णांक  $\frac{अउ}{बक}$  आहे; यावरून  $\frac{\frac{अ}{ब}}{\frac{उ}{क}} = \frac{\frac{अ}{ब} \times \frac{इ}{फ}}{\frac{उ}{क} \times \frac{इ}{फ}}$  हें (१२४) कलमांतील दु-

सऱ्या सारणीसां मिळतें आहे. त्याचप्रमाणें जेव्हां अक्षरे अपूर्णाकांचे ठिकाणीं घेतलीं आहेत, अथवा तीं काढून त्यांचे जागीं अपूर्णांक मांडिले आहेत, तेव्हां (१२४) कलमांतील बाकीचा दुसऱ्या सारणी खऱ्या आहेत असें दाखवितां येईल. जा सर्व सारिणी या पुस्तकांत सिद्ध केल्या आहेत, त्या जेव्हां पूर्णाकांचे ठिकाणीं अपूर्णांक लिहिवात, तेव्हांहि तशाच खऱ्या आहेत. उदाहरण, (५४) कलमांत,  $(म+न)अ = मअ + नअ$ . आतां म, न, आणि अ, हे अनुक्रमानें  $\frac{प}{क}$ ,  $\frac{र}{स}$ , आणि  $\frac{व}{क}$  याप्रमाणें अपूर्णांक आहेत असें मनांत आण. तर  $म+न$ , हे  $\frac{प}{क} + \frac{र}{स}$ , अथवा  $\frac{पस+कर}{कस}$  आहेत, आणि  $(म+न)अ$ , हे  $\frac{पस+कर}{कस} \times \frac{व}{क}$ , अथवा  $\frac{(पस+कर)व}{कसक}$  अथवा  $\frac{पसव+करव}{कसक}$  आहेत. परंतु हे (११२) प्रमाणें  $\frac{पसव}{कसक} + \frac{करव}{कसक}$  आहेत, हे  $\frac{पव}{कक} + \frac{रव}{सक}$ , यांचे बरोबर आहेत, कां कीं (१०८) प्रमाणें  $\frac{पसव}{कसक} = \frac{पव}{कक}$ , आणि  $\frac{करव}{कसक} = \frac{रव}{सक}$ . परंतु  $\frac{पव}{कक} = \frac{प}{क} \times \frac{व}{क}$  आणि  $\frac{रव}{सक} = \frac{र}{स} \times \frac{व}{क}$ . यामुळे  $(म+न)अ$ , अथवा  $(\frac{प}{क} + \frac{र}{स}) \frac{व}{क} = \frac{प}{क} \times \frac{व}{क} + \frac{र}{स} \times \frac{व}{क}$ . याचप्रमाणें बाकीचा सारणींविषयीं हीच गोष्ट सिद्ध करितां येईल.

† जी बीजरूप पद्धती वारंवार कामांत येता तीस सारणी असें नाव दिलें आहे.

हीं पुढील उदाहरणें उपयोगी आहेत ;

$$\frac{\frac{अ}{ब} \times \frac{क}{ड} + \frac{इ}{फ} \times \frac{ग}{ह}}{\frac{अ}{ब} \times \frac{इ}{फ} + \frac{क}{ड} \times \frac{ग}{ह}} = \frac{अकफह + बडइग}{अइडह + बकफग}$$

$$\frac{१}{अ + \frac{१}{ब}} = \frac{ब}{अब + १}$$

$$\frac{\frac{१}{अ + \frac{१}{ब + \frac{१}{क}}}}{\frac{१}{अ + \frac{१}{बक + १}}} = \frac{बक + १}{अबक + अ + क}$$

$$\text{जसे } \frac{१}{६ + \frac{१}{७ + \frac{१}{८}}} = \frac{१}{६ + \frac{८}{५७}} = \frac{५७}{३५०}$$

जा रिती सर्व अंकांविषयी खऱ्या अशा सिद्ध केल्या आहेत, त्या जेव्हां अंकांचा जागीं अक्षरें घेतलीं असतील, तेव्हां लागू करितां येतील.

## सहावा भाग.

### दशांश अपूर्णांक.

१२६. अपूर्णांकांचा मोठेपणा ताडून पडण्याकरितां, त्या अपूर्णांकांस समछेद करावे लागतात, हें (२१२) आणि (१२१) कलमांत पाहिलें. अपूर्णांकांस निरनिराळे छेद असतां, त्यांशीं कृति करितां येती त्यापेक्षां त्यांस समछेद केल्यावर त्यांशीं कृति, किती त्वरित होती हेंहि वर पाहिलें. या कारणावरून जा जा गणिताचा भागांत अपूर्णांकांची गरज लागती, त्या ठिकाणीं जा अपूर्णांकांस समछेद आहेत, अथवा जांस समछेदरूप लवकर देतां येईल, त्यांशिवाय दुसरे अपूर्णांक कामांत घेत नाहीत, असी चाल पडून गेली आहे. आतां, सर्व अंकांतून जांशीं कृति करायास सोपें पडतें, ते अंक १ यावर शून्ये असे असतात, जसे १०, १००, १०००, इत्यादि. या अंकांस दशागुणक

अंक ह्मणतात ; आणि जा अपूर्णाकाचा छेद यांतून कोणताहि अंक असतो, त्यास दशांश अपूर्णांक ह्मणतात, अथवा सामान्यतः दशांश ह्मणतात.

१२७. पूर्णांकास दशांश अपूर्णाकाचें रूप, अथवा दशांश अपूर्णांकास दुसऱ्या दशांश अपूर्णाकाचें रूप, सहज रितीनें देतां येईल. उदाहरण, (१०६) प्रमाणें, ९४ हे  $\frac{९४०}{१०}$  अथवा  $\frac{९४००}{१००}$ ,  $\frac{९४०००}{१०००}$  इत्यादि आहेत; आणि (१०८) प्रमाणें,  $\frac{३}{१०}$  हे  $\frac{३०}{१००}$ , अथवा  $\frac{३००}{१०००}$ , अथवा  $\frac{३०००}{१००००}$  इत्यादि आहेत. (५७) प्रमाणें कोणत्याहि संख्येचे उजव्ये बाजूस एक शून्य मांडणें, हें आणि त्या संख्येस १० नीं गुणणें हें सारिखेंच आहे, आणि (१०८) कलमाप्रमाणें याच रितीनें कोणत्याहि अपूर्णाकाचे अंश जितके वेळा १० नीं गुणावे, तितकेच वेळा १० नीं त्याचे छेदहि गुणावे.

१२८. या नंतर असा प्रश्न उत्पन्न होतो, कीं जो अपूर्णांक दशांश नाही, त्यास किंमत बदलल्यावांचून दशांशाचें रूप कसें द्यावें ? उदाहरणासाठीं  $\frac{७}{१६}$  अपूर्णांक घे, त्याचे अंश आणि छेद क्रमानें १०, १००, १०००, इत्यादि यांणीं गुणून,  $\frac{७०}{१६०}$ ,  $\frac{७००}{१६००}$ ,  $\frac{७०००}{१६०००}$ ,  $\frac{७००००}{१६००००}$ , असे अपूर्णांक होतील, आणि त्यांतून प्रत्येक (१०८) प्रमाणें  $\frac{७}{१६}$  यांचे बरोबर आहे. या प्रत्येक अपूर्णाकाचा छेद १६ यांणीं निःशेष भागिला जातो, आणि त्यापासून जे वेगळाले भागाकार येतात, ते हे पुढील दशगुणक अंक आहेत, ह्मणजे, १०, १००, १०००, १००००, इत्यादि. यामुळे त्या अपूर्णाकांतील कोणत्याहि एकाचा अंश १६ यांणीं निःशेष भागिला जातो, तर त्याच अंशाचे अपूर्णाकाचा अंश आणि छेद हे दोन्ही १६ नीं निःशेष भागिले जातील. असा भागाकार केल्यावर (१०८) प्रमाणें अपूर्णाकाची किंमत बदलल्यावांचून, दुसरा एक अपूर्णांक निघेल, जाचा छेद या पुढील एकादा दशगुणक अंक होईल, ह्मणजे, १०, १००, १०००, इत्यादि. आणि त्याची किंमत  $\frac{७}{१६}$  यांचे बरोबर होईल. आतां, ७०, ७००, ७०००, ७००००, इत्यादि यांतून कोणता पहिल्यानें १६ यांणीं निःशेष भागिला जातो हें शोधायचें राहिलें.

या वेगळाल्या संख्या, अनुक्रमे, १६ यांणीं भाग ;

१६)७०(४	१६)७००(४३	१६)७०००(४३७	१६)७००००(४३७५
<u>६४</u>	<u>६४</u>	<u>६४</u>	<u>६४</u>
६	६०	६०	६०
	<u>४८</u>	<u>४८</u>	<u>४८</u>
	१२	१२०	१२०
		<u>११२</u>	<u>११२</u>
		८	८०
			<u>८०</u>
			०

तर, असें दिसतें, कीं ७०००० हे त्या अंशांतून पहिल्याने १६ यांणीं निःशेष भागिले जातात. परंतु वरचा प्रत्येक भागाकार मांडण्याचें प्रयोजन नाही, कां कीं शेवटल्या भागाकारांत सर्व पूर्वीचे भागाकार आले आहेत हें स्पष्ट आहे. तर शून्यांची संख्या अनंत आहे असें मानून, कृति चालवावी, आणि जेव्हां बाकी शून्य राहिल तेव्हां थांबावें, आणि जितकीं शून्ये कामांत घेतलीं असतील, तीं मोजावीं. या पक्षांत, ७०००० हे १६×४३७५ आहेत, तर  $\frac{७००००}{१६००००}$  हा  $\frac{१६×४३७५}{१६×१००००}$ , अथवा  $\frac{४३७५}{१००००}$  हा इच्छिला अपूर्णांक होईल.

यामुळे, अपूर्णांकास दशांस अपूर्णांकाचें रूप देण्यासाठीं, अंशाचे उजव्येकडे शून्ये मांडून, बाकी न राहो तोपर्यंत छेदानें भाग. जो भागाकार येईल तो इच्छिलेल्या अपूर्णांकाचा अंश होईल, आणि भागाकार करायासाठीं जितकीं शून्ये कामांत आणिलीं असतील, तितकीं शून्ये १ याचे उजव्येकडे मांडिल्यानें इच्छिलेल्या अपूर्णांकाचा छेद होईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या पुढील अपूर्णांकांस दशांस अपूर्णांकाचें रूप दे.

$$\frac{१}{२}, \frac{१}{४}, \frac{२}{२५}, \frac{१}{५०}, \frac{३९२७}{१२५०}, \text{ आणि } \frac{४५३}{६२५}.$$

$$\text{उत्तर. } \frac{५}{१०}, \frac{२५}{१००}, \frac{८}{१००}, \frac{२}{१००}, \frac{३९४१६}{१००००}, \text{ आणि } \frac{७२४८}{१००००}.$$

१२९. बहुतकरून असे पक्ष असतात, कीं शून्ये मांडिल्यानें अपू-





असें मनांत आण;  $\frac{1}{9}$  याचे अंश आणि छेद दहा लक्षांनीं गुण, नंतर त्या दोहोंस ७ यांनीं भाग; ह्मणजे याप्रमाणें होईल

$$\frac{1}{9} = \frac{1000000}{9000000} = \frac{182049}{9000000}$$

जर अंशांतील  $\frac{1}{9}$  हा अपूर्णांक सोडून दिला, तर जें परिमाण सोडून दिलें, तें वास्तवीक एकमाचा एक दशलक्षांशाचा ७ वा भाग आहे; अथवा एकमाचा एकदशलक्षांशापेक्षां तें परिमाण कमी आहे. यामुळे  $\frac{182049}{9000000}$  हा इच्छिला अपूर्णांक आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$\frac{3}{९१}$ ,  $\frac{१७}{१४३}$  आणि  $\frac{१}{२४७}$ , या अपूर्णांकांचे मागीलप्रमाणें कोष्टक कर.

$\frac{३}{९१}$  { याचे भागाकारांत हे पुढील } पुनः पुनः येणारे अंक आहेत, } ३२९६७०, ३२९६७०, इत्यादि,

$\frac{१७}{१४३}$  ..... ११८८८१, ११८८८१, .....

$\frac{१}{२४७}$  ..... { ४०४८५८२९९५९५१४१७०० } इत्यादि. } ४०४८५८२९९५९५१४१७०० }

१३०. भागाकारांत वरप्रमाणें क्रमाक्रमानें अंकांचे पुनःपुनः येण्याचें कारण हेंच आहे ; जर १०००, इत्यादि अंकांस २४७ यांनीं भागिलें, तर भागाकार करितानां जी प्रत्येक बाकी येती, ती २४७ पेक्षां कमी आहे, ह्मणून ती बाकी ० किंवा २४६ यांचे मागला कोणताहि अंक येईल. यावरून, जर बाकी कधीहि ० होत नाहीं, तर भागाकार हवा तितका चालविल्यानें, एकादी बाकी पुनः दुसरे वेळीं येईल. मनांत आण, कीं पहिल्या सगळ्या २४६ वाक्या केवळ निरनिराळ्या आहेत, ह्मणजे, त्या १, २, ३, इत्यादिपासून २४६ पावेतो आहेत, आणि त्यांचा क्रम बरोबर नाहीं. २४७ वी बाकी २४७ यांचे बरोबर येत नाहीं, यामुळे जा वाक्या पूर्वीं आल्या, त्यांतून एकादीचे बरोबर २४७ वी बाकी होईल, तर जा ठिकाणची बाकी काहीं पूर्वींचे बाकी बरोबर येती, त्या ठिकाणापासून भागाकारांतील पूर्वींचे अंक क्रमानें पुनःपुनः येतील, हें स्पष्ट आहे.

१३१. जर बहुतेक अपूर्णांकांस दशांशांचें रूप देतां येत नाहीं, तर दशांश अपूर्णांकांचा उपयोग काय, असा प्रश्न फारकरून उत्पन्न होईल! त्यास उत्तर हेंच आहे; कीं व्यवहारी अपूर्णांकांची मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, करण्याचा रितीपेक्षां दशांशांची, मिळ-

वणी, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार करण्याचा रिती फार सोप्या आहेत; आणि जरी सर्व व्यवहारी अपूर्णाकांस दशांशाचें रूप देतां येत नाहीं, तथापि त्या प्रत्येक अपूर्णाकांचे जवळ जवळ असे दशांश अपूर्णाक काढितां येतात, आणि व्यवहारी अपूर्णाकांचे स्थळीं हे दशांश अपूर्णाक घेतल्यानें जी कांहीं चूक होती, ती लक्षांत घेण्याजोगी नसती. उदाहरण, मनांत आण, कीं एक इंचास एक कोटी समभागांत भागिला आहे, तर त्यांतील एक भाग डोळ्यांनीं दिसणार नाहीं. यामुळे सूक्ष्म मानाची जरी गरज असली, तरी लांबी मोजण्यांत इंचाचा कोट्यांशाची चूक असली तरी कांहीं चिंता नाहीं. आतां, (१२९) कलमांतील कोष्टक वाढविल्यानें  $\frac{१४२८५७१}{१०००००००}$  हा अपूर्णाक  $\frac{१}{१०००००००}$  पेक्षां इतक्यानें भिन्न नाहीं; आणि जर हे दोन अपूर्णाक इंचाचे भाग दाखवितात, आणि त्यांचे अंतर अतिलहान, दिसण्या जोगें नाहीं, ह्मणून पहिला अपूर्णाक दुसऱ्याचे जागीं घेतां येईल. व्यवहार कामांत अंकगणित लाविलें असतां, कांहीं चुकी वांचून कोणताहि पदार्थ केवळ बरोबर असा मोजतां येत नाहीं, तो पदार्थ लांबी, वजन, किंवा दुसरी कांहीं महत्वाची जात असो. यामुळे दशांश अपूर्णाकांशिवाय दुसरे कांहीं जातीचे अपूर्णाक कामांत घेण्याचें प्रयोजन नाहीं; कां कीं दुसऱ्या कांहीं रितीनें एकादें परिमाण जितकें चुकी वांचून दाखवितां येतें, त्याच प्रमाणें दशांशानें चुकी वांचून दाखवितां येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या पुढील अपूर्णाकांहून,  $\frac{१}{१००००००००}$  इतक्यानें भिन्न नाहीत असे दशांश अपूर्णाक काढ.

$$\frac{१}{३} \dots \text{उत्तर } \frac{३३३३३३३३}{१००००००००}$$

$$\frac{११३}{३५५} \dots \text{उत्तर } \frac{३१८३०९८५}{१००००००००}$$

$$\frac{४}{७} \dots \text{उत्तर } \frac{५७१४२८५७}{१००००००००}$$

$$\frac{३५५}{११३} \dots \text{उत्तर } \frac{३१४१५९२९२}{१००००००००}$$

१३२. प्रत्येक दशांशास असें रूप देतां येईल, कीं त्यांत एकादा पूर्णाक आणि कांहीं सरळ दशांश येतील, अथवा नुसते सरळ दशांश येतील, आणि त्या प्रत्येक दशांशाचा अंशाचा ठिकाणीं केवळ एक अंक येईल. उदाहरण,  $\frac{१४७३२६}{१०००}$  हा अपूर्णाक घे. (११५) प्रमाणें  $\frac{१४७३२६}{१०००}$  हे  $१४७ \frac{३२६}{१०००}$  आहेत; आणि  $३२६$  हे  $३००$ , आणि  $२०$ , आणि  $६$ , यांचे बरोबर आहेत; (१२२) प्रमाणें  $\frac{३२६}{१०००} = \frac{३००}{१०००} + \frac{२०}{१०००} +$

$\frac{६}{१०००}$  परंतु (१०८) प्रमाणें  $\frac{३००}{१०००}$  हे  $\frac{३}{१०}$  आहेत, आणि  $\frac{२०}{१०००}$  हे  $\frac{२}{१००}$  आहेत. यामुळे  $\frac{१४७३२६}{१०००}$  हे  $१४७ + \frac{३}{१०} + \frac{२}{१००} + \frac{६}{१०००}$  आहेत. आतां, कोणतीहि दुसरी संख्या घे, जसें १४७३२६ हे अंक घे, आणि कांहीं अपूर्णांक कर जांचे अंशस्थळीं ही संख्या असेल, आणि त्यांचे छेदस्थळीं १, १०, १००, १०००, १००००, इत्यादि येतील, आणि पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें त्या अपूर्णांकांस पूर्णांक आणि सरळ दशांश अपूर्णांकांचें रूप दे, असें केल्यानें हा पुढील कोष्टक उत्पन्न होईल.

दशांश अपूर्णांकांचें पृथकरण.

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{१४७३२६}{१} & = & १४७३२६ \\
 \frac{१४७३२६}{१०} & = & १४७३२ + \frac{६}{१०} \\
 \frac{१४७३२६}{१००} & = & १४७३ + \frac{२}{१०} + \frac{६}{१००} \\
 \frac{१४७३२६}{१०००} & = & १४७ + \frac{३}{१०} + \frac{२}{१००} + \frac{६}{१०००} \\
 \frac{१४७३२६}{१००००} & = & १४ + \frac{७}{१०} + \frac{३}{१००} + \frac{२}{१०००} + \frac{६}{१००००} \\
 \frac{१४७३२६}{१०००००} & = & १ + \frac{४}{१०} + \frac{७}{१००} + \frac{३}{१०००} + \frac{२}{१००००} + \frac{६}{१०००००} \\
 \frac{१४७३२६}{१००००००} & = & \frac{१}{१०} + \frac{४}{१००} + \frac{७}{१०००} + \frac{३}{१००००} + \frac{२}{१०००००} + \frac{६}{१००००००}
 \end{array}$$

वरचा कोष्टक शिकणारानें आपणच लिहावा, नंतर या पुढील उदाहरणांपासून दुसरे कोष्टक करावे.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या पुढील अपूर्णांकांस पूर्णांक, आणि अधिक सरळ अपूर्णांक रूप दे;

$$\frac{31814926}{10},$$

$$\frac{31814926}{100}, \text{ इत्यादि}$$

$$\frac{2900031}{10},$$

$$\frac{2900031}{100}, \text{ इत्यादि.}$$

$$\frac{2093000}{10},$$

$$\frac{2093000}{100}, \text{ इत्यादि.}$$

$$\frac{3331303}{1000},$$

$$\frac{3331303}{10000}, \text{ इत्यादि:}$$

१३३. वरचे कोष्टकांत, आणि त्या सारख्याच दुसऱ्या केलेल्या कोष्टकांत, जा अपूर्णांकांपासून पूर्णांक येतात, त्यांस पाहिलें असतां, असें दिसेल, कीं, ते याप्रमाणें मांडितां येतील; अपूर्णांकाचे छेदस्थळीं जितकीं शून्यें आहेत, तितके अंशाचे उजव्ये कडील अंक बिंदूनें, किंवा दुसऱ्या कांहीं खुणेनें वेगळे कर. तर

जेव्हां अपूर्णांक  $\frac{189326}{10}$  आहे, तेव्हां १८९३२.६ याप्रमाणें होईल

$$----- \frac{189326}{100} ----- 1893.26 -----$$

$$----- \frac{189326}{1000} ----- 1893.26 -----$$

$$----- \text{इत्यादि.} ----- \text{इत्यादि.} -----$$

अपूर्णांकांपासून जे पूर्णांक निघतात, ते बिंदूचे डाव्येकडचे अंक आहेत. बिंदूचे उजव्ये कडचा पहिला अंक, तो अशा अपूर्णांकाचा अंश आहे, जाचा छेद १० आहे, तसें उजव्येकडचा दुसरा अंक, तो अशा अपूर्णांकाचा अंश आहे, जाचा छेद १०० आहे, आणि इत्यादि. जा अपूर्णांकांपासून पूर्णांक निघत नाहीं त्यांविषयीं आतां विचार करितों.

१३४.  $\frac{189326}{1000000}$  हा अपूर्णांक घे, यांत छेदस्थळीं जितकीं, शून्यें आहेत, तितकेच अंशस्थळीं अंक आहेत. वर सांगितल्या रितीप्रमाणें

अंशाचे सर्व अंकांपूर्वी बिंदू मांडून यांस जर वेगळें केलें, जसे,  $\frac{187326}{10000000}$ , तर (१३३) कलमांत जें सांगितलें तें येथें लागू होतें; कां कीं,  $\frac{187326}{10000000}$  यास वरचे कोष्टकांत पाहून, तो पुढील प्रमाणें आहे असें दिसेल,

$$\frac{1}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{6}{1000000}$$

$\frac{187326}{10000000}$  हा दुसरा अपूर्णांक घे; वरचे कोष्टकावरून तो याप्रमाणें आहे,

$$\frac{1}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000}$$

या उदाहरणांत १ यास १० यांणीं भागिलें नाहीं, परंतु १०० नीं भागिलें आहे; यामुळें, जर सर्व अंशांकांचे पूर्वीच बिंदू मांडिला, तर वरची रीति खरी नाहीं, कां कीं बिंदूचे उजव्येकडील पहिल्ये अंकाचा जो छेद, तो रितीप्रमाणें दुसऱ्ये स्थळींचा असावा, तसा दुसऱ्या स्थळींचा जो छेद, तो तिसऱ्या स्थळीं असावा, आणि याप्रमाणें पुढें. तर या पक्षांत वरची रीति लागू करायासाठीं, असी योजना केली पाहिजे, कीं १ हा बिंदूचे उजव्येकडचा दुसऱ्ये स्थळीं येईल. ह्मणजे १ आणि बिंदू यांचे मध्ये शून्य मांडिल्यानें असें होईल, जसे,  $0.187326$ . हें खरें आहे, कां कीं वरचा रितीप्रमाणें यांस मांडिलें असतां याप्रमाणें होईल,

$$\frac{0}{10} + \frac{1}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000}$$

आतां हें तर वरचे प्रमाणेंच आहे, कां कीं  $\frac{0}{10}$  बरोबर ० आहे, ह्मणून तें पद कामांत आणण्याचें प्रयोजन नाहीं.

याचप्रमाणें, जर अंशस्थळींचे अंकांपेक्षां छेदस्थळीं दोन शून्ये अधिक असतील, तर बिंदू आणि अंशांतील पहिला अंक यांमध्ये दोन शून्ये मांडिल्यानें वरची रीति खरी लागू होईल. यामुळें विस्तारानें रीति, सांगितली असतां, ती या पुढीलप्रमाणें आहे;

कोणत्याहि दशांश अपूर्णांकास, पूर्णांक आणि अधिक सरळदशां-

शाचें रूप देण्यासाठी, किंवा जा अपूर्णाकांत पूर्णांक नसेल त्यास सरळ दशांशरूप देण्यासाठी, छेदांत जितकीं शून्ये आहेत, तितके अंक अंशांतून बिंदूने वेगळे कर. असें करायास अंशांतील अंक पुरत नाहीत, तर जितकीं स्थळे कमी आहेत, तीं भरायासाठी डाव्येकडे शून्ये मांडून त्या शून्यांचे पूर्वी बिंदू कर. असें केल्यावर बिंदूचे डाव्येकडेस जे अंक येतात, ते सांगितल्ये अपूर्णाकांतील पूर्णांक आहेत. बिंदूचे उजव्येकडे पहिला अंक जाचा छेद १० आहे, दुसरा अंक जाचा छेद १०० आहे, आणि इत्यादि, जे अंक आहेत ते सांगितल्या अपूर्णाकांचे अपूर्णांक आहेत.

१३५. दशांश अपूर्णाकांस विस्तारानें लिहिण्याची चाल नाही. छेदामध्ये जितकीं शून्ये येतात, तितकीं स्थळे अंशांकांतून बिंदूने वेगळीं करायास सोईस पडते. जेव्हां छेदस्थळींचीं शून्ये, अंशस्थळींचे अंकांपेक्षां अधिक आहेत, तेव्हां अंशाचीं अंकस्थळे जितकीं कमी आहेत, तितकीं शून्ये त्यांचे डाव्येकडेस मांडून, शून्यांचे पूर्वी बिंदू मांडितात. जसें,  $\frac{9}{10}$  यास  $\cdot 9$ , आणि  $\frac{9}{100}$  यास  $\cdot 09$  यांप्रमाणें मांडितात. हें सर्व अंकलेखन या पुढील कोष्टकावरून एकदांच कळेल, आणि पहिल्ये भागांत जें दशक अंकलेखन सांगितलें, त्यांशीं हें वरचें लेखन जो संबंध ठेवितें तोहि कळेल. पूर्णांकाचे एक स्थळींचा अंकाचे उजव्ये बाजूस जे जे अंक येतात, ते क्रमानें एक भागिले १०, १००, १००० इत्यादि आहेत, परंतु त्याचे डाव्येकडेचे अंक एक गुणिले, १०, १००, १०००, इत्यादि आहेत, असें पाहाण्यांत येईल.

शिकणारानें एथें दाखविल्याप्रमाणें दशांशाचा बिंदू अंकांचे डोव्याबरोबर अथवा मध्ये संभालून मांडावा, खालीं मांडू नये, कां कीं पुढचा बिजादि मोठ्या गणितामध्ये दोन अंकांचा किंवा अक्षरांचा गुणाकार दाखवायासाठी, त्यांचे मध्ये खालचे आंगास बिंदू मांडितात जसें, १५.१६, अ.व, अ+व क+ड, एथें या संख्यांचा किंवा अक्षरांचा गुणाकार तो बिंदू दाखवितो.

पहिला कोष्टक.

१२३४५	$\frac{१२३४}{१०}$ अथवा $१२३\frac{४}{१०}$	अथवा $१२३+\frac{४}{१०}$	यांचे जागी आहेत.
१२३४	$\frac{१२३४}{१००}$	$१२+\frac{३४}{१००}$	
१२३४	$\frac{१२३४}{१०००}$	$१+\frac{२३४}{१०००}$	
१२३४	$\frac{१२३४}{१००००}$	$+\frac{१}{१०}+\frac{२}{१००}+\frac{३}{१०००}+\frac{४}{१००००}$	
०१२३४	$\frac{१२३४}{१०००००}$	$+\frac{१}{१००}+\frac{२}{१०००}+\frac{३}{१००००}+\frac{४}{१०००००}$	
००१२३४	$\frac{१२३४}{१००००००}$	$+\frac{१}{१०००}+\frac{२}{१००००}+\frac{३}{१०००००}+\frac{४}{१००००००}$	

दुसरा कोष्टक

तिसरा कोष्टक.

०१०००३	$\frac{१००३}{१०००००}$ अथवा	$\frac{१}{१००}+\frac{३}{१०००००}$	यांचे जागी आहेत.
१००३	$\frac{१००३}{१००००}$	$\frac{१}{१०}+\frac{३}{१००००}$	
१००३	$\frac{१००३}{१००}$	$१०+\frac{३}{१००}$	
१००३	$\frac{१००३}{१०}$	$१००+\frac{३}{१०}$	
$\begin{aligned} १२८३ &= \frac{१}{१०} + \frac{२}{१००} + \frac{८}{१०००} + \frac{३}{१००००} \\ &= १ + ०२ = १००८ + ०००३ \\ &= १ + ०२८३ = १२ + ००८३ \\ &= १२८ + ०००३ = १०८ + ०२०३ \\ &= १००३ + ०२८ = १२०३ + ००८ \end{aligned}$			

दशांश अपूर्णांक.



चवथा कोष्टक. १२३४५६७८९ इतके  
इंच आहेत, तर यांत

१	हा	१०००	इंच आहेत
२	हे	२००	-----
३	हे	३०	-----
४	हे	४	-----
५	हे	$\frac{५}{१०}$	इंचाचे
६	हे	$\frac{६}{१००}$	-----
७	हे	$\frac{७}{१०००}$	-----
८	हे	$\frac{८}{१००००}$	-----
९	हे	$\frac{९}{१०००००}$	-----

१३६. (१०) व्हे कलमांत जें शून्यांपासून कार्य होतें, तेंच कार्य दशांश बिंदूचे उजव्या बाजूचे शून्यांपासून होतें. तीं शून्ये गणनेंत येत नाहींत, परंतु त्यांचा योगाने त्यांचे उजव्याकडे जे अंक येतात त्या अंकांचीं स्थळे दाखवितां येतात. पहिल्या भागांत उभ्या ओळी करून त्यांत जसे अंक मांडिले आहेत, त्याप्रमाणें एथें मांडिले असतां तीं शून्ये सोडून देतां येतील. जा अंकांशीं तीं शून्ये लागलेलीं असतात, त्यांपासून तीं वेगळीं आहेत हें जाणायसाठीं, त्या अंकांस अर्थ बोधक अंक ह्मणतात; जसे, ०००३७४७ हे सात अंकस्थळांचे दशांश आहेत, आणि त्यांत चार अर्थ बोधक अंक आहेत; ३४६ हे तीन स्थळांचे दशांश आहेत, आणि त्यांत तीन अर्थ बोधक अंक आहेत, इत्यादि.

१३७. दशांशाचे उजव्या बाजूस कितीहि शून्ये मांडिलीं तरी त्याची किंमत बदलत नाहीं. उदाहरण, ३ आणि ३०० हे घे. (१३५) प्रमाणें यांत पहिला  $\frac{३}{१०}$  आहे, आणि दुसरा  $\frac{३००}{१०००}$  आहे, आणि पहिल्याचे अंश आणि छेद १०० यांणीं गुणून दुसरा झाला आहे, ह्मणजे (१०८) प्रमाणें हीं सारखींच परिमाणें आहेत.

१३८. दोन अपूर्णाकांस समछेद करायासाठीं, जांत अंकांचीं स्थळे थोडीं आहेत त्याजवर इतकीं शून्ये मांडावीं, कीं दोन्ही अपूर्णाकांचीं अंकस्थळे बरोबर होतील. उदाहरण, ५४ आणि ४३२९७ हे घे. यांतून पहिला  $\frac{५४}{१००}$ , आणि दुसरा  $\frac{४३२९७}{१००००}$  आहे. (१०८) प्रमाणें पहिल्याचे अंश आणि छेद १०० यांणीं गुण, यावरून तो  $\frac{५४००}{१००००}$  होतो; आणि त्याचा छेद,  $\frac{४३२९७}{१००००}$  याचे छेदाबरोबर होतो. परंतु (१३५)

प्रमाणें  $\frac{५४००}{१०००}$  हा ५४०० आहे. दशांश चिन्ह पूर्णांकांचे उजव्येक-डेस मांडिलें पाहिजे; जसें, १२९ हे १२९० याप्रमाणें मांडिले पाहिजेत. परंतु असे पक्षांत दशांश चिन्ह बहुतकरून मांडीत नाहीं; तथापि लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं १२९ आणि १२९०००० यांची किंमत सारिखाच आहे, कां कीं यांतून पहिले १२९ आहेत, आणि दुसरे  $\frac{१२९०००}{१०००}$  आहेत.

१३९. मिळवणी, वजावाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, यांचा रिती जा मागील अध्यायांत सांगितल्या, त्या सर्व अपूर्णांकांस लागू होतात, आणि यामुळें दशांश अपूर्णांकांसहि लागू होतात. परंतु या अध्यायांत दशांश अपूर्णांक मांडण्याची जी रिती दाखविली आहे, तिजवरून त्या वेगळाल्या रिती लावण्यास सोंपें पडतें. आतां या वेगळाल्या पक्षांचा विचार करितों.

मनांत आण, कीं ४२६३४, ४५२८०६, २००१, आणि ५४ यांची बेरीज करायाची आहे. (११२) प्रमाणें यांस समछेद केले पाहिजेत, ह्मणजे (१३८) प्रमाणें त्यांस समछेदरूप देऊन या पुढीलप्रमाणें मांडितात; ४२६३४०, ४५२८०६, २००१०, आणि ५४०००००. हे वेगळाले दशांश अपूर्णांक आहेत, जांचे अंश ४२६३४०, ४५२८०६, २००१०, आणि ५४००००० असे आहेत, आणि त्यांचा साधारण छेद १००००० आहे. (११२) प्रमाणें यांची बेरीज  $\frac{४२६३४०+४५२८०६+२००१०+५४००००}{१००००}$ , अथवा  $\frac{१४३९१५६}{१००००}$ , अथवा १४३९१५६ अशी आहे. ही बेरीज करण्याची सोपी रीति पुढील आहे; वेगळाले दशांश एकाखालीं एक मांड, असे कीं त्यांचीं दशांश चिन्हे एकाखालीं एक येतील, जसें;

४२६३४

४५२८०६

२००१

५४

१४३९१५६

वेगवेगळाल्ये ओळींची बेरीज साध्ये मिळवणीप्रमाणें करून, दशांश चिन्ह दशांश चिन्हाचे खालीं मांड.

## अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$१५२७+६४७३२०९४+२००१३+००००१९७४;$  } यांचा वेग  
 $२२७६३+१०७+९+२६३१७२+५६७३२००१;$  } लाव्या बे-  
 आणि  $१११+७७+००३९+००१४२+८८३८?$  } रजा काय  
 आहेत ?

उत्तर,  $१५९३७३३४१३७४$ ,  $५९०३५६२५२$ ,  $९६९९१२$ .

१४०. मनांत आण, कीं  $१३७३२१$  यांतून  $९१०७३२४$  वजा करायाचे आहेत. या दोन अपूर्णाकांस समष्टेदकरून ( $१३८$ ) प्रमाणें  $९१०७३२४$  आणि  $१३७३२१००$  आहेत. तर यांची वजाबाकी  $\frac{१३७३२१००-९१०७३२४}{१०००००}$ , अथवा  $\frac{४६२४७७६}{१०००००}$  अथवा  $४६.२४७७६$  आहे. वजाबाकी करायासाठीं ही पुढील रीति सोपी आहे; लहान संख्या मोठ्या संख्येखाली मांड, अशी कीं त्यांचीं दशांश चिन्हे एकाखाली एक येतील, जसें :

$१३७३२१$

$९१०७३२४$

$४६.२४७७६$

वरचे ओळींतून खालची ओळ वजा कर, आणि जेव्हां एक ओळींत अंक आहे आणि दुसऱ्या ओळींत नाही, तेव्हां मनांत आण कीं, रिकाम्या जागीं शून्य आहे.

## अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$१२३६२-२७४२२१०७+५;$   
 $९९७६२०७३९४२-००१४३९७६७२८;$  } हे काय आहेत ?  
 आणि  $१२+०३+००४-०००५?$

उत्तर,  $१२०८८२७८९३$ ,  $९९७६२०५९५४४३२७२$ ; आणि

$१२३३५$ .

१४१. कोणताहि दशांश,  $१०, १००, १०००$ , इत्यादि यांणीं गुणायाचा असेल, तर दशांश बिंदू केवळ उजव्याकडे सारल्यानें गुणाकार होतो. मनांत आण, कीं  $१३२०७९$  हे  $१००$  यांणीं गुणायाचे

आहेत. हा दशांश  $\frac{132099}{100000}$  आहे, यास १०० यांणीं गुणलें तर (११७) प्रमाणें  $\frac{132099}{100}$ , अथवा १३२०.७९ आहे. पुनः,  $1309 \times 1000000 = \frac{1309}{10000} \times 1000000$ , अथवा (११६) प्रमाणें  $\frac{1309100000}{10000}$ , अथवा १३०९०० आहेत. या आणि पुढील उदाहरणांपासून ही पुढील रीति निघती; दशांश अपूर्णांकास दशगुणक अंकांनं गुणायाचें असेल, तर (१२६) प्रमाणें दशगुणक अंकांमध्ये जितकीं शून्यस्थळें आहेत, तितकींस्थळें दशांश विंदू उजव्येकडे सार. असें जेव्हां करितां येत नाहीं, तेव्हां (१३७) प्रमाणें असें होईपर्यंत दशांशाचे उजव्येकडेस शून्यें मांड.

१४२. मनांत आण, कीं १७.०३६ यांस ४.२७ यांणीं गुणायाचें आहे. यांतील पहिला दशांश  $\frac{17036}{10000}$ , आणि दुसरा  $\frac{427}{100}$  आहे. (११८) प्रमाणें १७०३६ आणि ४२७ यांचा गुणाकारापासून त्या अपूर्णांकांचा गुणाकाराचा अंश होतो, आणि १०००, आणि १०० यांचा गुणाकारापासून छेद होतो; यामुळें गुणाकार  $\frac{7208372}{1000000}$ , अथवा ७२.७४३७२ आहे. १७०३६ आणि ४२७ या दोन संख्या परस्पर गुणून, आणि १७.०३६ आणि ४.२७ यांत जितकीं दशांशस्थळें आहेत, तितकीं अंकस्थळें गुणाकारांत दशांश चिन्हानें वेगळीं केल्यानें वरचें काम सोपें पडतें, कां कीं दोन दशगुणक संख्यांत जितकीं शून्यें आहेत, तितकीं शून्यें त्यांचे गुणाकारांत येतात.

१४३. आतां हा प्रश्न उत्पन्न होतो; गुण्य आणि गुणक यांमध्ये जितकीं दशांशस्थळें असतील, तितकीं त्यांचे गुणाकारांत नसलीं, तर कसें करावें! या पक्षांत कसें करावें हें पहायासाठीं, १७२ यांस १०१ यांणीं गुण, अथवा  $\frac{172}{1000}$  यांस  $\frac{101}{1000}$  यांणीं गुण. या दोहोंचा गुणाकार  $\frac{17372}{1000000}$ , अथवा ०.१७३७२ आहे, (१३५) प्रमाणें. यामुळें, जेव्हां मागल्या कलमाची रीति लागू होण्यांस गुणाकाराचीं अंकस्थळें पुरीं होत नाहींत, तेव्हां तीं रिकामीस्थळें भरायासाठीं गुणाकाराचे डाव्येकडे शून्यें मांड, आणि त्यांचे डाव्येकडेस दशांश चिन्ह कर.

आणखी दुसरीं उदाहरणें.

०००१× ००१ हे ००००१ आहेत.

५६× ००००१ हे ०००५६ आहेत.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

$$\begin{aligned} ३०००२ \times ३०००२ &= ३ \times ३ + २ \times ३ \times ०००२ + ०००२ \times ०००२ \\ ११५६०९ \times ५३१९१ &= ८४४ \times ८४४ - ३१२०९ \times ३१२०९ \\ ८२१७ \times १०००१ &= ८ \times १० + ८ \times ००१ + १० \times २१७ + ००१ \times २१७ \end{aligned}$$

हे दाखीत !

अपूर्णांक.

वर्ग.

घन.

$$\begin{aligned} ८२९२ & \quad ६८७५७२६४ & \quad ५७०१३५२३३०८८ \\ \cdot ०१७३ & \quad \cdot ०००२९९२९ & \quad \cdot ०००००५१७७७१७ \\ १४३ & \quad २०४४९ & \quad २९२४२०७ \\ \cdot ००९ & \quad \cdot ००००८१ & \quad \cdot ००००००७२९ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} १५६२५ \times ६४ &= १००० & \quad १५६२५ \times ६४ &= १ \\ १५६२५ \times ६४ &= १ & \quad १५६२५ \times ०६४ &= १०० \\ \cdot ०१५६२५ \times ००६४ &= ०००१ & \quad १५६२५००० \times ०६४ &= १०००००० \end{aligned}$$

१४४. कोणताहि दशांश, १०, १००, १०००, इत्यादि दशगुणक अंकांनी भागायाचा असेल, तर दशगुणक अंकांमध्ये जितकीं शून्य-स्थळें असतील, तितकीं स्थळें दशांश बिंदू डाव्येकडे सारल्यानें भागाकार होतो. असें करायासाठीं भागाकारांत अंकस्थळें पुरत नार्हति, तर त्याचे डाव्येकडेस इतकीं शून्यें मांड, कीं रिकामींस्थळें भरतील, आणि त्यांचे पूर्वी दशांश चिन्ह मांड. उदाहरण, १७३४.२२९ यांस १००० यांनीं भाग; हा दशांश अपूर्णांक  $\frac{१७३४२२९}{१०००}$  आहे, हणजे हा

(१२३) प्रमाणें १००० यांणीं भागिला तर  $\frac{१७३४२२९}{१००००००}$ , अथवा १.७३४२२९ होतात. अशा रितीनें, १.२१०६ यांस १०००० यांणीं भागिलें, तर ०.०००१२१०६ होतात.

१४५. एक दशांश अपूर्णांक दुसऱ्ये दशांश अपूर्णांकानें भागण्याचे रितीचा संक्षेप करण्याचे पूर्वीं, (१२८) कलमांत कोणत्याहि अपूर्णांकास, दशांशरूप देण्याविषयीं जी गोष्ट सांगितली ती पुनः लक्षांत आणली पाहिजे. त्या कलमांत असें दाखविलें, कीं  $\frac{७}{१६}$  हे  $\frac{४३७५}{१००००}$  अथवा ०.४३७५ या बरोबर आहेत. आतां  $\frac{३}{१२८}$  यांस दशांश अपूर्णांकाचेंरूप दे. (१०८) कलमाचे रितीप्रमाणें कृति कर, जसें:

१२८) ३००००००० (२३४३७५

२५६

४४०

३८४

५६०

५१२

४८०

४८०

३८४

९६०

८९६

६४०

६४०

०

यावरून असें दिसतें कीं ७ शून्यें कामांत आणिल्यावर, ३०, ३००, इत्यादि वेगवेगळ्या संख्यांचे श्रेणींतील जी संख्या १२८ यांणीं निःशेष भागिली जाती, ती ३००००००० आहे; आणि यामुळें  $\frac{३}{१२८}$ , अथवा (१०८) प्रमाणें  $\frac{३०००००००}{१२८००००००}$  हे  $\frac{२३४३७५}{१०००००००}$ , अथवा (१३५) प्रमाणें ०.२३४३७५ यांचे बरोबर आहेत.

या वरचे उदाहरणापासून अपूर्णांकास दशांशरूप देण्याची रीति निघती; अंशाचे उजव्ये बाजूस शून्यें मांड; नंतर छेदानें भाग, आणि अंशातील सर्व अंक कामांत घेणें संपल्यावर, प्रत्येक बाकीवर शून्यें मांड आणि अंशाचीं शून्यें अनंत असें कल्पून त्यास छेदानें भागायाचें आहे, अशी कल्पना करून पुढें चाल. बाकी न राहीपर्यंत कृति करीत पुढें चाल, नंतर पहा कीं किती शून्यें कामांत आणिलीं. जितकीं शून्यें कामांत आणिलीं असतील, तितकीं उजव्येकडील भागाकारांतलीं स्थळें वेगळीं होतील असें दशांश चिन्ह मांड, यासाठीं भागाकारांतील अंकस्थळें पुरत नाहीत,

तर रिकामी स्थळें पुरीं होण्यांसाठीं भागाकारांचे डाव्येकडे शून्यें मांडून दशांश चिन्ह त्यांचे डाव्येकडे मांड.

१४६. (१२९) कलमांत जें सांगितलें, त्यापासून दिसतें, कीं हर एक अपूर्णाकास दशांश अपूर्णाक रूप देतां येत नाहीं. तथापि, त्यांत दाखविलें, कीं जास हवें तेवढें जवळ जवळ दशांश अपूर्णाकाचें रूप देतां येत नाहीं, असा कांहीं अपूर्णाक नाहीं. जसें,  $\frac{1}{10}, \frac{18}{100}, \frac{183}{1000}, \frac{1826}{10000}, \frac{18265}{100000}$  इत्यादि, अथवा  $\cdot 1, \cdot 18, \cdot 182, \cdot 1826, \cdot 18265$  हे अपूर्णाक  $\frac{1}{10}$  याचे अधिक जवळ जवळ येतात असें वर दाखविलें. या वेगळाल्या अपूर्णाकांस काढायासाठीं, मागील कलमांतील रीति लागू होती परंतु त्या रीतींत या पुढील प्रमाणें फेर करावा लागतो. पहिल्यानें कृति करितानां, बाकी शून्य रहात नाहीं, ह्मणून बाकी शून्य आल्यावर तेथें थांबतात त्याप्रमाणें, कृतीमध्ये कोठेहि थांबावें, आणि कृति करण्यांत जितकीं शून्यें घेतलीं असतील तितकीं अंकस्थळें भागाकारांत येतील असें करावें, जर भागाकारांत तितकीं स्थळें नसलीं, तर भागाकाराचे डाव्येकडे तितकीं शून्यें मांडून, स्थळें पुरीं करून त्यांचे डाव्येकडे दशांश चिन्ह मांड. दुसऱ्यानें जा अपूर्णाकाशीं कृति करायास आरंभ केला त्याचे केवळ बरोबर असा अपूर्णाक निघत नाहीं, परंतु त्याचे जवळ जवळ असा अपूर्णाक येतो, आणि भागाकारांत अधिकस्थळें घेतलीं, तर तो अपूर्णाक अधिक जवळ जवळ येतो. जसें  $\cdot 1826$  हे  $\frac{1}{10}$  याचे जवळ जवळ आहेत, परंतु  $\cdot 18265$  इतके जवळ नाहींत; आणि हेहि  $\cdot 18265$   $\cdot 18265$  इत्यादि, इतके जवळ नाहींत.

१४७. अपूर्णाकाचे अंशाचे उजव्ये बाजूस शून्यें असतील, त्यांची गणना त्या अपूर्णाकास दशांश रूप देण्याकरितां जीं नवीं शून्यें घ्यावीं लागतात, त्याशीं करू नये. उदाहरण,  $\frac{100}{125}$  हा अपूर्णाक घे; याचे अंशाचे उजव्येकडेस शून्यें मांडून, त्यास छेदानें भाग. असें दिसतें कीं १००० हे १२५ यांणीं भागिले जातात, आणि त्याचा भागाकार ८ होतो. या पक्षांत अंशावर केवळ एक शून्य मांडिलें आणि यामुळें १०० भागिले १२५ तर भागाकार ८ होतो.  $\frac{1}{125}$  हा अपूर्णाक घेतला, आणि १००० यांस १२५ यांणीं भागिलें तर भागाकार ८ होतो, आणि या पक्षांत अंशावर तीन शून्यें मांडावीं लागतात, तर दशांशअपूर्णाक  $\cdot 008$  आहे.

१४८. मनांत आण, कीं सांगितल्या अपूर्णाकांचे छेदाचे उजव्ये बाजूस शून्ये आहेत; जसे,  $\frac{31}{2500}$ . अंशावर शून्य मांडणें आणि छेदावरून शून्य छेकणें हीं दोन्हीं सारखींच आहेत; कां कीं (१०८) प्रमाणें  $\frac{310}{2500}$  हे  $\frac{31}{250}$  यासारखेच आहेत, आणि  $\frac{310}{250}$  हे  $\frac{31}{25}$  यासारखेच आहेत. तर या पक्षांत रीति हीच आहे; छेदांतील शून्ये छेकून अंशावर शून्ये मांडून पूर्वीप्रमाणें चाल; नंतर किती शून्ये कामांत आणिलीं, तें जाणायासाठीं अंशावर जीं शून्ये मांडिलीं तींच केवळ मोजून ये परंतु छेदांतून जितकीं शून्ये छेकलीं त्यांसुद्धां मोज.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या पुढील अपूर्णाकांस दशांश अपूर्णाकरूप दे;

$$\frac{1}{800}, \frac{36}{9250}, \frac{297}{68} \text{ आणि } \frac{1}{928}.$$

उत्तर.  $^{\circ}00125$ ,  $^{\circ}0288$ ,  $8^{\circ}680625$ , आणि  $^{\circ}001085$ .

या पुढील अपूर्णाकांचे जवळ जवळ ६ स्थळांचे दशांश काढ;

$$\frac{27}{89}, \frac{946}{33}, \frac{22}{39000}, \frac{984}{13}, \frac{2637}{9900}, \frac{1}{2900}, \frac{1}{866}, \text{ आणि } \frac{3}{277}$$

उत्तर.  $^{\circ}441020$ ,  $8^{\circ}727272$ ,  $^{\circ}000598$ ,  $18^{\circ}923076$ ,  $^{\circ}266179$ ,  $^{\circ}000383$ ,  $^{\circ}002185$ , आणि,  $^{\circ}010830$ .

१४९. (१२१) कलमापासून असे कळलें, कीं दोन अपूर्णांक समछेद असतील, तर पहिल्याचा अंश दुसऱ्याचे अंशानें भागल्यानें, पहिला अपूर्णांक दुसऱ्यानें भागला जातो. मनांत आण कीं,  $17^{\circ}762$  यांस  $6^{\circ}25$  यांणीं भागायाचें आहे. हे दोन अपूर्णांक (१३८) प्रमाणें समछेद झाल्यावर,  $17^{\circ}762$  आणि  $6^{\circ}250$ , अथवा  $\frac{17762}{1000}$  आणि  $\frac{6250}{1000}$  असे आहेत. यामुळें त्यांचा भागाकार  $\frac{17762}{6250}$  आहे, तर यास मागील रितीप्रमाणें दशांश अपूर्णाकरूप दिलें पाहिजे. ही कृति विस्तारानें या पुढील प्रमाणें आहे; छेदस्थळींचीं शून्ये सोड, आणि अंशावर किंवा वेगळाल्ये वजावाक्यांवर हवीं तेवढीं शून्ये मांड, नंतर (१४५) प्रमाणें भागाकार कर.



६२५)१७७६२(२८४१९२

१२५०

५२६२

५०००

२६२०

२५००

१२००

६२५

५७५०

५६२५

१२५०

१२५०

०

या उदाहरणांत अंशावर चार शून्ये घेतलीं, आणि छेदांतून एक शून्य छेकिलें. तर भागाकारांत पांच दशांश स्थळे कर, ह्मणजे १७.७६२ यांस ६.२५ यांणीं भागण्यानें, २.८४१९२ असा भागाकार होतो.

१५०. एक दशांश अपूर्णाक दुसऱ्या दशांश अपूर्णाकानें भागण्याची ही पुढील रीति आहे; भाज्य आणि भाजक यांमध्ये जात दशांशस्थळें थोडीं आहेत, त्यावर शून्यें मांडून त्या दोहोंचीं दशांशस्थळें बरोबर कर. नंतर जितकीं दशांशस्थळें पाहिजेत, तितकीं शून्यें भाज्यावर मांडून दशांशचिन्ह

काढून सरळ भागाकाराप्रमाणें कृति कर. भागाकारांत इच्छिलेलीं दशांशस्थळें घे.

जसें, ६.७१७३ यांस ०.१४ यांणीं तीन दशांशस्थळांपावेतो भागायाचें असेल, तर आरंभीं या दोहोंत चार दशांशस्थळें असायासाठीं ६.७१७३ आणि ०.१४० असें मांडावें. भागाकारांत तीन दशांशस्थळें असायासाठीं, ६.७१७३ यांवर तीन शून्यें मांडावीं लागतात; परंतु असें दिसतें कीं ०.१४० या भाजकावर एक शून्य आहे, ह्मणून तें शून्य छेकून ६.७१७३ यावर दोन शून्यें मांडावीं. दशांशचिन्ह काढून, ६.७१७३०० यांस ०.१४ किंवा १४ यांणीं चालत्ये रितीनें भाग, ह्मणजे त्यावरून भागाकार ४७९८०७ आणि बाकी २ येतात. यावरून ४७९८०७ हें उत्तर आहे.

सामान्यतः रीति हीच आहे; भाज्यांत भाजकापेक्षां जितकीं अधिक दशांशस्थळें आहेत, तितकीं भागाकारांत दशांशस्थळें असावीं. परंतु जेव्हां भाजकापेक्षां भाज्यांत अधिक दशांशस्थळें असतील, आणि भाज्यावर शून्यें मांडावीं लागतात, या पक्षाशिवाय बरची रीति निरूपयोगी होती. पूर्वी सांगितलेली रीति याप्रमाणेंच आहे, आणि तींत किती द-

शांशस्थळें असावीं हें सांगितलें आहे. परंतु पुरवणी मध्ये गुणदर्शका-  
विषयी जी रीति सांगितली आहे, ती शिकणारानें पुरतेपणी माहित क-  
रून घ्यावी, आणि दशांशचिन्हाचें स्थळ तर्कानें काढण्याचा अभ्यास  
करावा. जसें,  $२६ \cdot ११९ \div ७ \cdot २४३६$  यांचे भागाकारांत दशांशचिन्हाचे  
पूर्वी एक अंक आहे, हें उघड आहे आणि  $२६ \cdot ११९ \div ७ \cdot २४३६$  यांचे  
भागाकारांत दशांशचिन्हाचे उजव्येकडे सर्वार्थबोधक अंकांचे पूर्वी एक  
शून्य आहे.

अथवा ही पुढील रीति कामांत आणावी; भाजकाचें द-  
शांशचिन्ह पुसून टाक, आणि भाजकांत जितकीं दशांशस्थळें असतील  
तितकीं स्थळें भाज्याचें दशांश चिन्ह उजव्येकडे सार, आणि स्थळें  
पुरत नसलीं, तर भाज्यावर शून्यें मांड. नंतर सरळ भागाकाराप्रमाणें  
भागून, शेवटील कामांत घेतलेल्या प्रत्येक दशांशस्थळाविषयीं भागाका-  
रांत एक एक दशांशस्थळ कर, जसें,  $१७ \cdot ३१४$  हे  $६१ \cdot २$  यांणीं भा-  
गणें तर  $१७ \cdot ३१४$  भागिले  $६१२$  असें होतें, आणि दशांशचिन्ह भा-  
गाकारांत डाव्येकडील पहिल्या अंकाचे पूर्वी असावें. परंतु  $१७ \cdot ३१४$   
भागिले  $६६१७ \cdot ५$  हे, दशांश चिन्ह सारल्यावर  $१७३ \cdot १४$  भा-  
गिले  $६६१७५$  असे होतात; आणि जापेशां भागाकारांत पहिला  
एक अंक येण्याचे पूर्वी,  $१७३ \cdot १४००००$  यांतून तीन दशांशस्थळें घ्यावीं  
लागतात, हणून भागाकारांतील पहिला अर्थबोधक अंक दशांशाचा  
तिसऱ्या स्थळावर येतो, अथवा भागाकार  $\cdot ००२$  याप्रमाणें होतो.

उदाहरणें.

$$\frac{३१}{००२५} = १२४०, \frac{१०००६२}{६४} = १०००९६०७५.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$$\frac{१५ \cdot ००६ \times १५ \cdot ००६ - ००४ \times ००४}{१५ \cdot ०१} = १५ \cdot ००२ \text{ आणि } \frac{०१ \times ०१ \times ०१ + २ \cdot ९ \times २ \cdot ९ \times २ \cdot ९}{२ \cdot ९१} = २ \cdot ९ \times २ \cdot ९ - २ \cdot ९ \times ०१ + ०१ \times ०१ \text{ हें दाखीव!}$$

$$६ \text{ दशांश स्थळांपावेतो हे पुढील अपूर्णांक काय आहेत? } \frac{१}{३१४१५९}$$

$$\frac{१}{२७१८२८१८} \text{ आणि } \frac{३६५}{१८३४९}.$$

उत्तर.  $\cdot ३१८३१०$ ;  $\cdot ३६७८७९$ , आणि  $१९८९ \cdot २०९२२१$ .

पुढील श्रेण्यांचे दहापदांची ५ दशांश स्थळेंपर्यंत किंमत काढ.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \text{इत्यादि} = 1.01028.$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{इत्यादि} = 2.92095.$$

$$\frac{60}{61} + \frac{61}{62} + \frac{62}{63} + \frac{63}{64} + \text{इत्यादि} = 2.66266.$$

१५१. आतां, व्यर्थ श्रम पडूं नये अशी दशांश परिमाणांशीं गणित करण्याची रीति दाखवितों. आरंभी, मनांत आण, कीं भलत्ये कांहीं मैलांचें भोज घेऊन, त्यांची संख्या १७°८४६२१७ अशी झाली. या लांबींत किती मैल आहेत असें विचारिलें असतां, आणि अंश भागावांचून केवळ सुमाराचें उत्तर इच्छिलें असलें, तर बहुतकरून १७ मैल आहेत असें सांगतां येईल. जरी लांबीतील पूर्ण मैलांची संख्या ही आहे, तरी मैलांचे जवळ जवळ ही संख्या नाही; कां कीं लांबी १७ मैल आणि ८ दशांशापेक्षां अधिक आहे, ह्मणून ती साडेसत्रापेक्षां अधिक आहे तर ती लांबी १८ मैल आहे असें झटलें असतां, १७ मैल ह्मणण्यापेक्षां खरी आहे. ही संख्या अधिक आहे, तथापि हिचा अधिकपणा १७ मैलांचे कमीपणा इतका नाही, ह्मणजे त्यांत अर्ध मैलाइतकी चूक नाही. पुनः जर, ती लांबी मैलाचे दशांशाचे आंत इच्छिली असेल, तर १७°८४ हें उत्तर आहे; कां कीं जरी हें उत्तर ०४६२१७ इतक्यानें कमी आहे, तथापि जितक्यानें १७.९ अधिक आहेत, तितक्यानें तें कमी नाही; आणि दशकाचें अर्ध, अथवा  $\frac{1}{2}$  यापेक्षां त्यांत चूक कमी आहे. पुनः जर, ती लांबी मैलाचे शतांशाचे आंत इच्छिली असेल, तर १७°८५ हे १७°८४ यापेक्षां खरे आहेत, कां कीं ००६२१७ इतक्यानें १७°८४ कमी आहेत, ह्मणजे हे ०१ याचे अर्धापेक्षां अधिक आहेत; आणि यामुळें १७°८४+०१ हे १७°८४ यापेक्षां अधिक खरे आहेत. यावरून ही सामान्य रीति उत्पन्न होती; कामापुरती अमुक दशांशस्थळांची संख्या सांगितली, तर तिचे उजव्येकडचे सर्व बाकी दशांश टाक, परंतु टाकलेल्यांतील डाव्येकडचा पहिला अंक ५ चे बरोबर किंवा त्यापेक्षां अधिक असेल, तर घेतलेल्यांतील उजव्येकडचा पहिला अंक १ नें वाढवावा.

अनुक्रमानें एकएक स्थळ सोडून, दशांशाचा संक्षेप करण्याचीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत.

३.१४१५९, ३.१४१६, ३.१४२, ३.१४, ३.१, ३.०  
 २.७१८२८१८, २.७१८२८२, २.७१८२८, २.७१८३, २.७१८,  
 २.७२, २.७, ३.०

१.९९१९, १.९९२, १.९९, २.००, २.०

१५२. गुणक आणि भाजक इत्यादि यांत जितकीं खरीं दशांश स्थळें असतात, त्यांपेक्षां अधिक दशांश स्थळें, गुणाकार आणि भागाकार इत्यादि कृतींचे उत्तरांत आणण्याचें प्रयोजन नाही. मनांत आण, कीं ९.९८ आणि ८.९६ ह्या दोन, इंचांचा लांब्या दोन दशांश स्थळांपावेतो बरोबर मोजल्या आहेत, अथवा एक इंचाचे शतांशाचे आंत मोजल्या आहेत. जी लांबी ९.९८ ह्यटली तिची खरी किंमत ९.९७५ आणि ९.९८५ यांचेमध्ये कोठेहि असेल, आणि ८.९६ इची खरी किंमत ८.९५५ आणि ८.९६५ यांचे मध्ये कोठेहि असेल. यामुळें खऱ्या लांब्या दाखविणाऱ्या जा संख्या, त्यांचा गुणाकार, ९.९७५  $\times$  ८.९५५ आणि ९.९८५  $\times$  ८.९६५ यांचे मध्ये येईल, ह्याजो गुणाकारांत तीन दशांश स्थळें घेतल्यानें, ८९.३२६ आणि ८९.५१६ यांचे मध्ये येईल. पहिल्या सांगितल्या संख्यांचा खरा गुणाकार ८९.४२०८ आहे. तर, असें दिसतें, कीं या पक्षांत गुणाकारांतील ८९ या पूर्णांकावर आणि कदाचित्, दशांशाचे पहिल्ये स्थळावर मात्र भरंवसा ठेवतां येतो. याचें कारण हेंच, कीं ८.९६ यांचे मोजण्यांत केवळ दशांशाचे तिसऱ्ये स्थळावर चूक येती, तथापि ती चूक गुणाकार करण्यानें ९.९७५ इतकी, अथवा जवळ जवळ १० वेळा वाढली जाती, आणि यामुळें ती दशांशाचे दुसऱ्ये स्थळाचे अंकास गूणकरिती. अशा कोणत्याहि गुणाकारावर कोठपर्यंत भरंवसा ठेवावा, हें ह्या पुढील सरळ रितीपासून कळेल. गुणक दाखवायासाठीं अ, आणि गुण्य दाखवायासाठीं ब घे; हे जर केवळ दशांशाचे पहिल्ये स्थळापावेतो खरे आहेत, तर त्यांचा गुणाकार बरोबर खरा होण्यास  $\frac{अ+ब}{२०}$  यांचे आंत यावा; जर ते अंक दशांशाचे दोन स्थळांपावेतो खरे आहेत, तर त्यांचा गुणाकार बरोबर खरा होण्यास,  $\frac{अ+ब}{२००}$  यांचे आंत यावा; आणि जर तीन स्थळांपावेतो, तर  $\frac{अ+ब}{२०००}$  यांचे आंत यावा; आणि याप्रमाणें पुढेहि. जसें, वरचे उदाहरणांत, ९.९८ आणि ८.९६ ह्या दोन संख्या दोन

हें बरोबरच खरें नाही, परंतु कामापुरतें जवळ जवळ खरें आहे.

दशांश स्थळांपावेतो खऱ्या आहेत; त्यांची बेरीज २०० नीं भागिली, तर भागाकार ०९४७ होतो, आणि त्यांचा गुणाकार ८९४२०८ आहे, हा तर खरा बरोबर होण्यास ०९४७ यांचे आंत आहे. जर ८९४२०८ हे ०९४७ यांणीं वाढविले, आणि कमी केले, तर ८९५१५५ आणि ८९३२६१ असे येतात, ह्मणजे हे अंक गुणाकाराचा दोन मर्यादा आहेत, आणि त्यांचे मध्ये गुणाकार यावा. यावरून, असे दिसते, कीं या पक्षां दशांशाचे पहिल्ये स्थळावर भरंवसा ठेवतां येत नाहीं, कां कीं जर ते पहिले स्थळ खरे आहे, तर (१५१) प्रमाणें ०५ इतकी चूक येणार नाहीं; आणि यांत ०९ इतकी, किंवा हिजपेक्षां अधिक चूक अवश्य घडती. जर दिलेले अंक खरे आहेत, तर त्यांचा गुणाकारहि खरा आहे असें ह्मणण्याचें अगदीं प्रयोजन नाहीं, आणि दिलेले अंक केवळ अमुक दशांश स्थळापर्यंत खरे आहेत, असें या कलमापासून दिसते हें ह्मणण्याचें प्रयोजन नाहीं. तर याविषयीं रीति या पुढीलप्रमाणें आहे; गुण्य आणि गुणक यांची बेरीज करून तिचें अर्ध कर, नंतर गुण्य अथवा गुणक यांत जितकीं दशांशस्थळे खरीं असतील, तितकीं स्थळे डाव्येकडे त्या अर्ध बेरिजेत दशांश चिन्ह सार; तर यावरून जें उत्तर येईल त्याचे आंत गुणाकारावर भरंवसा ठेवतां येईल. भागाकाराविषयीं ही पुढील रीति आहे; गुण्य आणि गुणक यांचे जागीं भाज्य आणि भाजक घेऊन वरचे रितीप्रमाणें कृति कर, नंतर जें येईल त्यास भाजकाचे वर्गानें भाग; जो भागाकार येईल त्याचे आंत दिलेले भाज्य आणि भाजक यांचे भागाकारावर भरंवसा ठेवतां येईल. उदाहरण, १७३२४ यांस ५३८०९ यांणीं भागायाचें असेल, आणि ह्या दोन्ही संख्या तीन दशांश स्थळांपर्यंत खऱ्या असतील, तर त्यांची अर्ध बेरीज ३५५६६ होईल, आणि ती वरचे रितीप्रमाणें ०३५५६६ होईल, ती ५३८०९ यांचे वर्गानें अथवा सुमारानें, ५० चे वर्गानें, अथवा २५०० यांणीं भागायाची आहे. हा भागाकार ००००२ यापेक्षां काहीं कमी आहे, ह्मणून १७३२४ आणि ५३८०९ यांचे भागाकारावर चार दशांशस्थळे पर्यंत भरंवसा ठेवतां येतो.

१५३. दोन दशांश अपूर्णांक परस्पर असे गुणायाचे आहेत, कीं अनुपयोगी दशांश सोडून गुणाकारांत काहीं सांगीतलेलीं मात्र दशांश स्थळे रहावीं. या पुढील सांगीतलेल्या संकेतावरून, पहिल्यानें, स्पष्ट

आहे, कीं कोणत्याहि गुणकांतील अंक उलट्या क्रमानें मांडिले, ह्मणजे १२३४ हे ४३२१ असे मांडिले, आणि जर कृति करलेसमयीं प्रत्येक ओळ एक स्थळ डाव्येकडे न मांडितां, तशीच उजव्येकडे मांडिली तर चालेल, जसे, या पुढील उदाहरणांत;

२२२१	२२२१
१२३४	४३२१
८८८४	२२२१
६६६३	४४४२
४४४२	६६६३
२२२१	८८८४
२७४०७१४	२७४०७१४

मनांत आण, कीं ३४८८४१४ यांस ५१३०७४२ यांणीं गुणायचें आहे, असें कीं गुणाकारांत चार दशांशस्थळें मात्र रहावीं. वर सांगितल्या रितीप्रमाणें गुणकाचे अंक उलटे फिरवून मांडिले, तर या पुढील प्रमाणें होईल.

३४८८४१४	
२४७०३१५	
१७४४२०७०	
३४८८४१४	
१०४६५२४	२
२४४१८	८९८
१३९५	३६५६
६९	७६८२८
१७८९८१५२२	२३१८८

डाव्येकडील पहिलीं चार दशांशस्थळें, आणि जा ओळीपासून तीं चार दशांशस्थळें झालीं, त्या दोहोंस एकवे उभ्ये रेघेनें दुसऱ्यापासून वेगळीं कर. संक्षेप रीति करलेसमयीं स्पष्ट आहे, कीं या पुढील गोष्टी मात्र लक्षांत आणिल्या पाहिजेत. पहिल्यानें, जें सर्व उभ्ये रेघेचे डाव्ये बाजूस आहे, त्याचा

विचार केला पाहिजे; दुसऱ्यानें, उभ्ये रेघेचे उजव्येकडील पहिल्ये ओळींतून जे हातचे घेण्याचे आहेत, त्यांचा विचार केला पाहिजे. उभ्ये रेघेचे डाव्येकडील पहिली ओळ पाहिली असतां, ४, ४, ८, ५, ९, हे अंक दिसतात, त्यांतून पहिले ४ हे ४×१' यापासून होतात, दुसरे ४ हे १×३' यापासून, ८ हे ८×७' यापासून, ५ हे ८×४' यापासून आणि

† १ हा गुणक अंक आहे हें जाणयासाठीं, १' अशे रूपानें मांडिला आहे.

९ हे  $४ \times २$  यापासून होतात. गुण्य आणि त्याचे खालीं गुणक उलटून मांडिल्यानें या पुढीलप्रमाणें होतें, ह्मणजे,

$$३४८८४१४$$

$$२४७०३१५$$

दशांशाचीं पहिलीं चार स्थळें उत्पन्न होण्यासाठीं, गुणकाचे जा अंकानें गुण्यांतील पहिला अंक गुणावा लागतो, ते दोन्ही अंक एकाखालीं एक येतात. आणि एथें पहा, कीं  $५१ \cdot ३०७४२$  या गुणकांतील एक स्थळीचा अंक १, हा गुण्यांतील अवस्था दशांशस्थळींचे ४, या अंकाखालीं येतो. जर उभे रेषेचे उजव्येकडून काहीं हातचे घेण्याचे नसतील, तर ही पुढील रीति लागू होईल; गुणकाचे अंक उलटे फिरीव, आणि ते गुण्याखालीं मांड, अशा रीतीनें कीं, गुण्यांतील जें शेवटील दशांशस्थळ ठेवण्याचें आहे, त्याचा खालीं गुणकांतील एकमस्थळींचा अंक यावा; गुणकांतील जा अंकांवर गुण्याचे अंक नसतील त्यांवर शून्ये मांड; चालखे रीतीप्रमाणें गुणाकार कर, परंतु गुणकाचा जा अंकानें गुणायाचें आहे, त्याचा वरचा गुण्यांत जे अंक आहेत, त्यापासून गुणण्यास प्रारंभ कर, उजव्येकडील अंकांस मनांत आणूं नको; गुणाकाराचे ओळींचे पहिले अंक एकाखालीं एक मांड. उभे रेषेचे उजव्येकडून डाव्येकडे हातचे नेतां यावे, यासाठीं या रीतींत फेर करायास, या पुढील दोन गोष्टींवर लक्ष दिलें पाहिजे, पहिल्यानें गुणाकाराचा ओळी करतानां जे हातचे घ्यावे लागतात त्यांवर लक्ष दिलें पाहिजे, दुसऱ्यानें उभे रेषेचे उजव्येकडील पहिल्ये ओळीचे बेरिजेपासून जे हातचे घ्यावे लागतात, त्यांविषयीं लक्षांत आणिलें पाहिजे. गुणकांतील प्रत्येक अंकानें त्याचे वरल्या उजव्येकडील पहिल्या अंकास गुणावें, आणि गुणाकारांतील एकचा अंक न मांडितां, हातचे दुसऱ्या अंकाचा गुणाकारांत मिळवावे, असें केल्यानें, वर सांगितलेली पहिली गोष्ट सिद्ध होती. परंतु (१५१) व्हे कलमांतील मूळकारणावरून ५ पासून १५ पर्यंत हातचा १, १५ पासून २५ पर्यंत हातचे दोन, इत्यादि घेतल्यानें, ह्मणजे, जवळचे दशक अंक हातचे घेतल्यानें, वरचा दोन ही गोष्टींची व्यवस्था होती. जसें, ३७ आले असतां, हातचे ४ घ्यावे, कां कीं ३७ हे ३० पेक्षां ४० चे जवळ आहेत. यावरून दशांशाचें शेवटील स्थळ बरोबर येणार नाहीं, परंतु खरें उत्तर येण्या-

करितां, जितकीं दशांशस्थळें असावीं, त्यांपेक्षां एक स्थळ अधिक घेऊन प्रारंभ केला असतां, चूक येणार नाहीं. तर यावरून ही पुढील रिती निघसे.

१५४. दोन दशांशअपूर्णांकांचे गुणाकारांत दशांशाचीं न स्थळें येण्याकरितां याप्रमाणें कर.

पहिल्यानें. गुणकाचे अंक उलटे फिरवून दशांशविंदू सोडून गुण्याखालीं गुणक मांड, असे कीं गुण्याचे न दशांश स्थळांखालीं गुणकाचा एक स्थळींचा अंक येईल, आणि असें करितांना गुणकाचे प्रत्येक स्थळावर गुण्याचा अंक नसला, तर त्याचे जागीं शून्यें मांड.

दुसऱ्यानें. चालीप्रमाणें गुणाकार कर, परंतु गुणकांतील प्रत्येक अंकावर गुण्यांतील जो अंक येतो, त्याचे उजव्येवाजूचे अंकानें गुणाकार करायास आरंभ कर; ह्या गुणाकाराचा अंक मांडू नये, परंतु त्याचे जवळचा दशक हातचा घेऊन पुढें चाल.

तिसऱ्यानें. सर्व ओळींचे उजव्येकडील पहिले अंक एकाखालीं एक मांड; नंतर चालीप्रमाणें बेरीज घे; आणि दशांशासाठीं उजव्येकडे न स्थळें घे.

१३६४०७२ यांस १३०६०९ यांणीं गूण, असें कीं गुणाकारांत ७ दशांशस्थळें होतील.

$$\begin{array}{r}
 १३६४०७२००० \\
 ९०६०३१ \\
 \hline
 १३६४०७२००० \\
 ४०९२२१६०० \\
 ८१८४४३२ \\
 १२२७६६ \\
 \hline
 १७८१६००७९८
 \end{array}$$

या पुढील उदाहरणांत वरचा दोन ओळी गुण्य आणि गुणक आहेत; आणि गुणाकारांत जितकीं दशांश स्थळें ठेवायाचीं आहेत तीं उत्तरांपासून कळतील.



०४७१६१८	३३१६६२४८	३०४६४१०१६
३०७१९२१४	१०४१४२१३६	१७३२५०८
३०७१९२१४	०३३१६६२४८	३४६४१०१६०
८१६१७४४	६३१२४१४१	८०५२३७१
१५०८७६८६	३३१६६२५	३४६४१०१६०
१५० ६८	१३२६६५०	२४२४८७११२
२६०-३४	३३१६६	१०३९२३०५
३७७२	१३२६६	६९२८२०
२२६३	६६३	१७३२०५
३८	३३	२७७१
३०	१०	६००१५८३७३
१६८६६५९१	२	
	४६९०४१५	

(१४३) कलमापासून अभ्यासाकरितां दुसरीं उदाहरणें मिळतील.

१५५. भागाकाराचे उदाहरणाकरितां, भलत्या कांहीं दोन संख्या घे, जसें, १६८०४३७९२१ आणि ३१४२, यांतून पहिली संख्या कांहीं इच्छिल्या स्थळांपावेतो, जसें, एथे ५ स्थळांपावेतो दुसऱ्या संख्येनें भाग. ह्मणजे याप्रमाणें होईल;

$$३१४२) १६८०४३७९२१ (५३४८३०$$

$$१५७१०$$

	१०९४३
	९४२६
(अ)	१५१७७
	१२५६८
२६०९	२६०९९
२५१४	२५१३६
९५	९६३२
९४	९४२६
१	२०६१

आतां (१५३) प्रमाणें, शेवटचे २६०१ या बाकीतील २ यांचे उ

जव्येकडेस जे अंक येतात, त्यांस उभ्ये रेघेनें दुसऱ्यांपासून वेगळे कर. गुणाकाराप्रमाणें-यांत, जे उभ्ये रेघेचे डाव्येकडे आहेत, ते सर्व वरचे (अ) प्रमाणें संक्षेपरितीने निघतील. गुणाकाराचे संक्षेपरितीविषयीं एवढें वर उघड करून सांगितलें, आतां एथें अधिक विस्ताराने सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं; तर ह्या पुढील रितीनें हि निर्वाह होईल; एक दशांशअपूर्णांक दुसऱ्या दशांशअपूर्णांकानें न स्थळापर्यंत भागायाचा असेल; तर चालत्ये रितीनें एक पायरीपर्यंत भागाकार कर, आणि (१५०) प्रमाणें भागाकार कोणत्या स्थळांचा अंक आहे, त्याचा निश्चय कर; नंतर भाजकांतील अंकांचा स्थळांपेक्षां भागाकारांतील काढण्याचीं राहिलेलीं स्थळे कमी असतील, तोंपर्यंत चालत्ये रितीनें भागाकार करित जा; जर भागाकार करण्याचे आधींच असें असेल, तर चालीप्रमाणें भागाकार करित पुढें जाऊं नको. वजावाकीवर शून्य किंवा अंक मांडून ये, परंतु त्याचे बदलींत भाजकाचे उजव्ये वाजूकडील एक अंक सोडून, संक्षेप भाजकानें चालीप्रमाणें एक पायरी पुढें चाल, परंतु ही गोष्ट स्मरणांत ठेविली पाहिजे, कीं या संक्षेप भाजकाचा गुणाकार करते समयां, त्यांतून जो अंक सोडिला त्याचे जवळचा दशक, (१५४) प्रमाणें हातचा घेतला पाहिजे; याप्रमाणें भाजकांतील सर्व अंक क्रमाक्रमानें काहीं न राहात पर्यंत सोडीत पुढें चाल. भागाकारांतील पहिल्या अंकाचें स्थळ, आणि इच्छिलेलीं दशांशस्थळें या दोन्ही गोष्टी आरंभीं समजतात, यावरून भागाकारांत किती अंकस्थळें होतील हें कृतीचे आरंभी सांगतां येईल. भागाकारापेक्षां भाजकांत अधिक अंकस्थळें असलीं तर तीं कामांत घेण्याचें अगत्य पडत नाहीं; ह्मणून तीं सोडून द्यावीं. परंतु बाकी अंक (१५१) प्रमाणें नीट केले पाहिजेत; भाजकाचे डाव्येकडेस आरंभीं शून्यें असलीं, जसें, १००३१७८ असा दशांशअपूर्णांक भाजक असेल, तर तो अपूर्णांक  $\frac{3178}{100}$  या रूपाचा आहे, तर चालते रितीप्रमाणें ३१७८ यांणीं भाग, नंतर भागाकारास १०० नीं गुण, अथवा दशांशचिन्ह दोन स्थळें उजव्येकडे सार. यामुळें जर ६ दशांशस्थळें इच्छिलीं आहेत, तर स्पष्ट दिसतें कीं ३१७८ यांणीं भागणें तर ८ स्थळें घेतलीं पाहिजेत. भागाकाराचा शेवटील अंक काढितेसमयां, जवळचा अंक असेल तो घेतला पाहिजे, जसें, या पुढील उदाहरणांतून दुसऱ्या उदाहरणांत दाखविलें आहे.

इच्छिलेलीं स्थळें,

भाजक,

भाज्य,

२

४१४३२

६७३१४८९

४१४३२

२५८८२८

२४८५९२

१०२३७\*

८२८६

१९५१

१६५७

२९४

२९०

४

४

०

८

३१४१५९२७

२७१८२८१८०

२५१३२७४१६

२०५००७६४

१८८४९५५६

१६५१२०८

१५७०७९६

८०४१२

६२८३२

१७५८०

१५७०८

१८७२

१५७१

३०१

२८३

१८

१९

भागाकार,

१६२४७१

८६५२५५९६

(१४३) आणि (१५०) कलमांतून दुसरीं उदाहरणें मिळतील.

## सातवा भाग.

## वर्गमूळ काढण्याविषयी.

१५६. पूर्वी (६६) कलमांत असें सांगितलें आहे, कीं कोणतीहि संख्या त्याच संख्येनें गुणिली, तर त्या गुणाकारास त्या संख्येचा वर्ग ह्मणतात. जसें, १६९, अथवा  $१३ \times १३$  हा १३ चा वर्ग आहे. उलटे

\* भाष्यांतील सोडिलेला अंक ९ आहे, याकरिता या जागी ६ चे ठिकाणी ७ मांडिले आहेत (१५१) प्रमाणें.

पक्षानें, १३ यांस १६९ यांचें वर्गमूल झणतात, आणि ५. हें २५ यांचें वर्गमूल आहे; आणि जेव्हां एक संख्या त्याच संख्येने गुणून तो गुणाकार दुसऱ्या संख्येचे बरोबर आहे, तर पहिली संख्या दुसरे संख्येचें वर्गमूल आहे.  $\sqrt{\text{अथवा}} \sqrt{\quad}$  या चिन्हांने वर्गमूल दाखवितात; जसें,  $\sqrt{२५}$  याचा अर्थ पंचविसांचें वर्गमूल, अथवा ५ होतो.  $\sqrt{१६+९}$  हें  $१६+९$  यांचें वर्गमूल किंवा ५ आहे, आणि अशे वर्गमूल रूपाचा,  $\sqrt{१६}+\sqrt{९}$  या रूपाशीं गोंधळ करूं नये, कां कीं याचा अर्थ ४+३ अथवा ७ आहे.

१५७. वर सांगितल्या व्याख्यानापासून हीं पुढील समीकरणें स्पष्ट कळतील;

$$\sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{अ}} = \text{अ}$$

$$\sqrt{\text{अअ}} = \text{अ}$$

$$\sqrt{\text{अब}} \times \sqrt{\text{अब}} = \text{अब}$$

$$(\sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}}) \times (\sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}}) = \sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}} \times \sqrt{\text{ब}} = \text{अब}$$

यावरून

$$\sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{ब}} = \sqrt{\text{अब}}$$

१५८. कोणत्याहि संख्येचा वर्ग होतो, झणून त्या संख्येचें वर्गमूल हि आहे असा निश्चय नाही; जसें, ५ हे जरी त्याणीच गुणिलें जातील, तथापि, तिणें तीच गुणिल्यानें ५ होतील अशी कांहीं संख्या नाही. बीजगणितांत ही गोष्ट सिद्ध झाली आहे, कीं त्याणें तोच गुणिला असतां गुणाकार पूर्णांक येईल असा कोणताहि अपूर्णांक नाही, आणि कितीहि उदाहरणें घेतलीं तरी ही गोष्ट खरी आहे असें कळेल; यामुळें ५ यांस नुसता पूर्णांक किंवा नुसता अपूर्णांक असें एकहि वर्गमूल नाही. झणजे यांस निःशेष वर्गमूलच नाही, असें असतां असे अपूर्णांक काढण्याचा रिती आहेत, कीं जांचे वर्ग हवे तेवढे ५ यांचे अवळ होतील, परंतु बरोबर ५ होणार नाहीत. त्यांतील एकारिती पासून  $\frac{१५१२७}{६७६५}$  येतात, झणजे यांचा वर्ग  $\frac{१५१२७}{६७६५} \times \frac{१५१२७}{६७६५}$ , अथवा  $\frac{२२८०२६१२९}{४५७६५२२५}$  होतो; यांचें आणि ५ यांचें अंतर  $\frac{४}{४५७६५२२५}$  इतकें मात्र आहे, झणजे, तें अंतर ०००००००१ यापेक्षां कमी आहे; यावरून अंक गणित आणि बीजगणित यांतील तर्क करायला,  $\sqrt{५}$  हे

† या ठिकाणीं खऱे जातोचा अपूर्णांक, जसें  $\frac{७}{८}$ , अथवा  $\frac{१५}{११}$  असा असावा, परंतु जे अपूर्णांकरूपांत असून खरेपणानें पूर्णांक आहेत, जसें  $\frac{१०}{५}$ , अथवा  $\frac{२७}{३}$ , असा नसावा.

कामांत घेतां येतील, परंतु कोणतेहि कृत्य वहिवाटींत आणावें लागेल, तेव्हां जा अपूर्णाकाचा वर्ग ५ यांचे जवळ असेल, त्यास  $\sqrt{५}$  यांचे जागी कामांत घेतलें पाहिजे. आणि जसें जसें खरेपणाचें अगत्य असेल, तसा तसा अपूर्णाक निवडला पाहिजे. कां कीं कांहीं कामासाठीं  $\frac{१२३}{५५}$  हा अपूर्णाक पुरेल, कां कीं याचा वर्ग आणि ५ यांचें अंतर  $\frac{४}{३०२५}$  इतकें मात्र आहे; दुसऱ्या कामासाठीं, वर सांगितलेला अपूर्णाक घ्यावा लागेल; अथवा कदाचित् जाचा वर्ग त्यापेक्षां ५ यांचे अधिक जवळ जवळ होईल तो घ्यावा लागेल. जा संख्येचें बरोबर वर्गमूळ आहे, तें काढायाची, अथवा जीस वर्गमूळ बरोबर नाहीं, त्याविषयां जाचा वर्ग हवा तेवढा तिचे जवळ येईल, असा अपूर्णाक काढायाची रीति आतां दाखवितों. पुढील गोष्ट स्पष्ट आहे, तथापि आरंभीं सांगितलें पाहिजे, कीं दोन संख्यांतून मोठे संख्येचा वर्ग मोठा आहे; आणि कोणतीहि संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचेमध्यें असली, तर तिचा वर्ग त्या दोन संख्यांचे वर्गांमध्ये येतो.

१५९. क्ष ही एक संख्या आहे, आणि तीजमध्ये कांहीं भाग आहेत जसें अ, ब, क, ड, हे चार भाग; ह्मणजे या पुढीलप्रमाणें,

$$\text{क्ष} = \text{अ} + \text{ब} + \text{क} + \text{ड}$$

(६८) प्रमाणें त्या संख्येचा वर्ग पुढीलप्रमाणें आहे,

$$\text{अअ} + २\text{अ(ब+क+ड)}$$

$$+ \text{बब} + २\text{ब(क+ड)}$$

$$+ \text{कक} + २\text{कड}$$

$$+ \text{डड}$$

त्या कलमांत वेगवेगळ्या भागांचे संख्येचा वर्ग करायाची रीति या-प्रमाणें सांगितली आहे; प्रत्येक भागाचा वर्ग करून, त्याचे उजव्येकडचे सर्व निरनिराळे भाग त्याचे दुपटीनें गुण, नंतर या वेगळाल्या गुणाकारांची बेरीज करून, त्या सर्व संख्येचा वर्ग होईल. वर आलेल्या पद्धतीमध्ये २अ यांस ब, क, आणि ड, या प्रत्येकानें निरनिराळें गुणून त्यांची बेरीज न घेतां, २अ यांस त्यांचे सर्व पुढल्ये भागांचे बेरीजेनें गुणिलें आहे, ह्मणजे (५२) प्रमाणें हीं दोन्ही सारिखीच आहेत, आणि एका संख्येचे निरनिराळे भाग कसेहि मांडिले असतां, त्यांची बेरीज त्या संख्येचे बरोबर आहे, ह्मणून त्या भागांचा क्रम उलटा

मांडितां येईल, ह्मणजे, शेवटचे पद पहिल्यानें मांडितां येईल; आणि इत्यादि असें केल्यानंतर वर्ग करण्याची ही पुढील रीति आहे; प्रत्येक भागाचा वर्ग करून त्याचे डाव्येकडचे सर्व निरनिराळे भाग त्याचे दुपटीनें गुण. यावरून वर्गमूल काढायास एक उलटीरीति सोईनें सांपडती. ती ही आहे; न संख्येचें वर्गमूल काढायाचें असेल, तर कांहीं अ संख्या घे, आणि न संख्येतून अ संख्येचा वर्ग वजा होतो किंवा नाहीं हें पहा; जर वजा होईल, तर वजा करून बाकी काढ, नंतर दुसरी एक ब संख्या घे, तर ब चा वर्ग, आणि पूर्वी घेतलेली अ संख्या ब चे दुपटीनें गुणून तो गुणाकार, हीं दोन्हीवर आलेल्या बाकींतून वजा होतील किंवा नाहीं हें पहा; जर वजा होतील, तर वजा करून दुसरी बाकी काढ. नंतर तिसरी एक क संख्या घे, तर क चा वर्ग, आणि अ+ब यांस क चे दुपटीनें गुणून तो गुणाकार, हीं दोन्ही वरचे दुसऱ्या बाकींतून वजा होतील तर पहा; याप्रमाणें जेंपर्यंत बाकी कांहीं राहाणार नाहीं, तेंपर्यंत कर, अथवा कोणताही नवा भाग १ इतका लहान घेऊन त्याशीं कृति केली असतां, पूर्व बाकींतून वजा करितां येत नाहीं, तोंपर्यंत कृति कर. यांतून पहिल्यापक्षां अ, ब, क, इत्यादींची बेरीज इच्छिलें वर्गमूल आहे; दुसऱ्यापक्षां वर्गमूल नाहीं.

१६०. उदाहरण, मनांत आण कीं २०२५ यांचें वर्गमूल जाणायाची इच्छा आहे. पहिला भाग २० घेतला, तर २० यांचा वर्ग ४००, हे २०२५ यांतून वजा करून पहिली बाकी १६२५ निघती. पुनः दुसऱ्या भागासाठीं २० घेतले, तर त्यांचा वर्ग आणि पहिला भाग २० यांचे दुपटीने गुणून याप्रमाणें होतें, ह्मणजे  $२० \times २० + २ \times २० \times २०$ , अथवा १२०० होतात; हे १६२५ या पहिल्या बाकींतून वजा करून दुसरी बाकी ४२५ निघती. तिसऱ्या भागासाठीं ७ घेतले, तर हे अधिक आहेत असें दिसतें, कां कीं  $७ \times ७ + २ \times ७ \times २० + २०$ , ह्मणजे ६०९ होतात, हे तर ४२५ पेक्षा अधिक आहेत. यामुळे ५ घेऊन पहा, ह्मणजे  $५ \times ५ + २ \times ५ \times २० + २०$ , हे बरोबर ४२५ होतात, तेणेंकरून कृति संपती. यामुळे २०२५ यांचें वर्गमूल २०+२०+५, अथवा ४५ आहे, हें ताडून पाहिलें असतां खरें आहे असें दिसेल; कां कीं  $४५ \times ४५ = २०२५$  आहेत. पुनः, १३३४० यांचें वर्गमूल आहे कीं नाहीं, हें विचारिलें आहे असें मनांत आण. पहिल्या भागा-

गतीं १०० घे, ह्यणजे यांचा वर्ग १०००० हा सांगीतलेल्या संख्ये-  
जून वजाकरून ३३४० ही पहिली बाकी निघती. दुसऱ्या भागासाठीं  
१० घे, तर  $१० \times १० + २ \times १० \times १००$ , अथवा २१०० हे पहिल्ये  
बाकीतून वजाकरून, ३३४०-२१००, अथवा १२४० ही दुसरी बा-  
की निघती. तिसऱ्या भागासाठीं ५ घे; तर  $५ \times ५ + २ \times ५ \times$   
 $(१०० + १०)$ , अथवा ११२५ होतात, हे १२४० यांतून वजा केले,  
तर बाकी ११५ राहातात. यावरून दिसते कीं या पक्षांत वर्गमूळ  
नाहीं; कां कीं चवथ्या भागासाठीं केवळ एक एक घेतला, तर  
 $१ \times १ + २ \times १ \times (१०० + १० + ५)$ , अथवा २३१ होतात, हे तर ११५  
पक्षां अधिक आहेत. परंतु सांगीतली संख्या, १३३४०, ही ११५  
इतक्यानें कमी असती, तर प्रत्येक बाकी ११५ इतक्यानें कमी अस-  
ती, आणि शेवटीं बाकी शून्य राहाती. यामुळे १३३४०-११५,  
अथवा १३२२५ यांचें वर्गमूळ १००+१०+५, अथवा ११५ आहे;  
ह्यणून विचारिलेल्या प्रश्नाचें उत्तर हेंच आहे, कीं १३३४० यांचें वर्ग-  
मूळ नाहीं, आणि १३२२५ ही संख्या तिचे जवळची खालची आहे,  
जिचें वर्गमूळ बरोबर ११५ आहे.

१६१. बहुतकरून जे भाग घेण्यास सोईस पडतील, त्यांची सूच-  
ना व्हावी अशे तऱ्हेचें रूप वरचे रितीस देण्याचें मात्र राहिलें आहे.  
(५७) प्रमाणें स्पष्ट आहे, कीं जा संख्येचे उजव्येकडेस शून्यें आहेत,  
जसें, ४०००, यांचे वर्गांत शून्यांची संख्या दुप्पट आहे. जसें,  
 $४००० \times ४००० = १६००००००$ ; यामुळे, कोणतीहि वर्ग संख्या,<sup>†</sup>  
जसें ४९, तिजवर शून्यांची समसंख्या असली, जसें ४९००००, तर  
ती वर्ग संख्या आहे. ४९०००० हिचें मूळ\* ७०० आहे. ही गोष्ट  
मनांत ठेऊन, उदाहरणाकरितां, भलती काहीं संख्या घे, जसें ७६१७६;  
यांत उजव्येकडून डाव्येकडेस दोन दोन अंकांवर खुणा करून त्यांस  
वेगळे कर, याप्रमाणें शेवटीं एक किंवा दोन अंक राहातपर्यंत करीत  
जा; जसें ७,६१,७६. ही संख्या ७,००,००, हिजपेक्षां अधिक आहे,  
परंतु तिचा डाव्येकडील पहिला अंक, वर्ग संख्या नाहीं, तिचेजवळ

† वर्ग संख्या ह्यणजे जीस वर्गमूळ आहे. जसें २५ ही वर्ग संख्या आहे, परंतु २६  
हा तशी नाहीं.

\* वर्गमूळ शब्दाचे जागीं बहुतकरून संक्षेपाकरितां केवळ मूळ असें झटलें आहे.

ची खालची वर्गसंख्या ४ आहे. यावरून ७,००,००, हिचे जवळ-  
 ची खालची वर्गसंख्या ४,००,००, आहे यांत चार झून्ये आहेत,  
 आणि तिचे वर्गमूल २०० आहे. तर २०० हे पहिले भागाक-  
 रितां घे; त्यांचा वर्ग ७६१७६ यांतून वजा करून, ३६१७६ ही  
 पहिली वजावाकी राहाती; आणि ७६१७६ यांचे वर्गमूलांतून, अति  
 मोठे संख्येची अति मोठी संख्या अशांनी निघाली हें स्पष्ट आहे;  
 कां की ३०० ही मोठी होती, ह्मणजे तिचा वर्ग ९,००,००, हा  
 ७६१७६ पेक्षा अधिक आहे; तर (१६०) कलमांतल्या उदाहरणाप्र-  
 माणें, ३६१७६ या बाकीपासून दुसरा भाग निवडून काढायाचा रा-  
 हिला. आतां जें वर सांगितलें त्यापासून दिसतें, कीं हा दुसरा भाग  
 १०० एवढा होणार नाहीं; यामुळे त्याची अति मोठी संज्ञा दशकां-  
 तील कांहीं संख्या होईल. १, २, ३, इत्यादि सरळ संख्यांचे दशक  
 दाखवायासाठीं न घे; ह्मणजे नवा भाग दाखवायासाठीं १० न घे,  
 यांचा वर्ग  $१०न \times १०न$ , अथवा  $१००नन$  आहे, आणि त्याची  
 दुप्पट पूर्वीचे भागानें गुणून  $२० न \times २००$ , अथवा  $४००० न$  होतात;  
 हीं दोन्ही मिळून  $४०००न + १००नन$  होतात. आतां न ची  
 किंमत अशी घेतली पाहिजे कीं, वरची पद्धती ३६१७६ यांपेक्षा अधिक  
 होणार नाहीं. ३६१७६ यांत ४००० किती वेळा जातात, अथवा  
 ३६ यांत ४ किती वेळा जातात, ती वेळांची संख्या नचे जागीं घे-  
 ऊन पाहातां येईल. (८१) कलमांतील गोष्ट एथें लागू होती. ह्मणून  
 ९ दशक किंवा ९० घेऊन पहा. तर,  $२ \times ९० \times २०० + ९० \times ९०$ ,  
 अथवा ४४१००, हे वजा करायाचे आहेत, हे तर अधिक आहेत, कां  
 की वरची बाकी केवळ ३६१७६ आहे. पुनः ८ दशक, किंवा ८० घेतले,  
 तर  $२ \times ८० \times २०० + ८० \times ८०$ , अथवा ३८४०० होतात, आणि हेहि  
 अधिक आहेत. ७ दशक किंवा ७० घेतले, तर  $२ \times ७० \times २०० +$   
 $७० \times ७०$ , अथवा ३२९०० होतात, हे ३६१७६ यांतून वजा करून  
 ३२७६ ही दुसरी वजावाकी निघती. वर्गमूळाचा राहिलेला भाग अ-  
 वश्य एकंचा असता. पूर्वीप्रमाणें कांहीं एकंची संख्या दाखवायासाठीं  
 न घे. पूर्वीचा भाग  $२०० + ७०$  किंवा २७० असतां, जी संख्या  
 वजा करायाची आहे, ती  $२७० \times २न + नन$ , अथवा  $५४०न + नन$   
 आहे. यावरून, पूर्वीप्रमाणें, ५४०न हे ३२७६ यांपेक्षा कमी असते.



अथवा ३२७६ यांत जितक्या वेळा ५४० जातात, अथवा (८१) प्रमाणे ३२७ यांत जितक्या वेळा ५४ जातात, त्या वेळां पेक्षां न अधिक नसावा. यामुळे, ६ चालतील कीं नाहीं हें पाहतां, तर यावरून  $२ \times ६ \times २७० + ६ \times ६$ , अथवा ३२७६ ही संख्या वजा करायास मिळाली. ही तर दुसऱ्या वजावाक्रीचे बरोबर आहे, आणि तिसरी बाकी शून्य होऊन कृति संपती. यामुळे, इच्छिलें वर्गमूळ  $२०० + ७० + ६$  अथवा २७६ आहे.

जा संख्या वजा करायाचा आहेत, त्या करण्याची रीति या पुढील-प्रमाणे संक्षिप्त होईल. पूर्वी काढलेल्या भागांची बेरीज दाखवायासाठीं अ, आणि नवा भाग दाखवायासाठीं न घे; तर जी वजा करायाची आहे, ती २अन+नन आहे, अथवा, (५४) प्रमाणे २अ+न गुणिला न आहे. यामुळे वजा करण्याची संख्या काढण्याची रीति हीच आहे; पूर्वीचे सर्व भागांचे बेरिजेची दुप्पट करून त्यांत नवा भाग मिळवून ती बेरीज नव्या भागानें गुणावी.

१६२. मागील कलमांतली कृति या पुढीलप्रमाणे आहे;

७,६१,७६(२००	७,६१,७६(२७६
४ ०० ००    ७०	४
४०० ) ३,६१,७६    ६	४७) ३६१
७० ) ३२९००	३२९
४०० ) ३२७६	५४६) ३२७६
१४० ) ३२७६	३२७६
६            ०	०

वरचा पहिल्या उदाहरणांत, संख्या विस्तारानें मांडिल्या आहेत; दुसऱ्या उदाहरणांत, (७९) कलमाप्रमाणे अनुपयोगी शून्ये छेंकिलीं आहेत, आणि कृतिपुढे चालवून, ६१, आणि ७६ हे दोन भाग, जोपर्यंत त्यांचे खाली शून्ये येत नाहींत तोपर्यंत खाली आणीत नाहीं. मागील कलमांतील तर्क लागू होईल असें खालीं एक दुसरें उदाहरण देतो.

३४,८६,७८,४४,०१(५००००		३४,८६,७८,४४,०१(५९०४९	
२५०० ०० ०००० ९०८०		२५	
१०००००	९८६७८४४०१	१०९)	९८६
९०००	९८१००००००		९८१
१०००००	५७८४४०१	११८०४)	५७८४४
१८०००	४७२१६००		४७२१६
४०	१०६२८०१	११८०८९)	१०६२८०१
१०००००	१०६२८०१		१०६२८०१
१८०००			
८०			
९			

१६३. कोणत्याहि संख्येचें वर्गमूल काढण्याची रीति;

**पहिल्यानें.** जोंपर्यंत डाव्येकडील दोन किंवा एक अंकस्थळ मात्र राहिल, तोंपर्यंत उजव्येकडून आरंभून दोनदोन अंकांचीं स्थळें खुणेनें निरनिराळीं कर.

**दुसऱ्यानें.** डाव्येकडील पहिल्या भागांतल्या अंकाचे खालचा जवळचा वर्गसंख्येचें मूल काढ. हें मूल इच्छिल्या मूळाचा पहिला अंक होईल; त्याचा वर्ग पहिल्या भागांतून वजाकरून पहिली बाकी निघेल.

**तिसऱ्यानें.** त्या बाकीचे उजव्येकडेस सांगीतल्ये संख्येचा दुसरा भाग मांडून तो पहिला भाज्य होईल.

**चवथ्यानें.** मूळाचा पहिल्या अंकाची दुप्पट करून, तो त्या पहिल्या भाज्याचे उजव्ये कडील एक अंक सोडून त्यांत किती वेळा जाईल तें पहा, पाहिजे तर खालचे (९) प्रमाणें कर; अशांनै जो भागाकार येईल, तो इच्छिलेल्या मूळाचा दुसऱ्या अंकस्थळीं मांड; यास पहिल्या अंकाचे दुपटीचे उजव्ये कडेस मांडून त्यास पहिला भाजक द्वण.

**पांचव्यानें.** पहिला भाजक मूळाचे दुसऱ्ये अंकांनै गुण; जर तो गुणाकार पहिल्या भाज्यापेक्षां अधिक असेल, तर असा केलेला गुणाकार जोंपर्यंत पहिल्या भाज्यापेक्षां कमी येईल, तोंपर्यंत मूळाचे दुसऱ्ये स्थळीं आणि भाजकाचे उजव्ये कडचे स्थळीं त्यापेक्षांलहान अंक मांड, नंतर तो गुणाकार पहिल्या भाज्यांतून वजा करून दुसरी बाकी निघेल.

**साहाय्यानें.** या दुसऱ्या बाकीचा उजव्येकडेस सांगीतले संख्येचा तिसरा भाग मांडून, दुसरा भाज्य होईल.

**सातव्यानें.** मूळाचा पहिल्या दोन अंकांची दुप्पट\* करून, ही, दुसऱ्या भाज्याचे उजव्येकडील एक अंक सोडून त्यांत किती वेळा जाईल तें पहा; अशांनं जो भागाकार येईल तो इच्छित्ये मूळाचे तिसरे स्थळीं मांड. आणि यास पहिल्या दोन अंकांचे दुपटीचे उजव्येकडेस मांडून त्यास दुसरा भाजक ह्मण.

**आठव्यानें.** पांचव्याप्रमाणें नवी बाकी काढ, आणि सांगीतल्या संख्येंतील सर्व भाग संपतपर्यंत, अशी कृति पुनःपुनः करीत जा; जर शेवटीं कांहीं बाकी राहिली नाही, तर वर्गमूळ बरोबर निघालें; बाकी राहिली, तर सांगीतल्ये संख्येला वर्गमूळ नाही, ह्मणजे सांगीतल्ये संख्येंतून शेवटील बाकी वजा करून जी संख्या राहाती, तिचेंच तें काढिलेलें वर्गमूळ आहे.

**नवव्यानें.** भाज्याचे उजव्येकडील अंक आव्यानंतर मूळांतल्ये अंकांची दुप्पट त्यांत जात नाही असें जर घडेल, अथवा जेव्हां, एकवेळा जात असतां, १ यानें कृती करून भाज्यापेक्षां अधिक होतात, या दोहों पक्षांत वर्गमूळस्थळीं आणि भाजकस्थळीं शून्य मांडून, सांगीतल्ये संख्येचा पुढील भाग खाली घे; असें जर पुनः घडेल, तर मूळ आणि भाजक यांवर दुसरें शून्य मांडून, सांगीतल्ये संख्येचा पुढील दुसरा अंक भाग खाली घे; आणि याप्रमाणें पुढे कर.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

सांगीतल्या संख्या.	वर्गमूळें.
७३४४१	२७१
२९९२९००	१७३०
६४१४२४७९२१	८००८९
९०३६८७८९०६२५	९५०६२५
४२४२०७४७४८२७७६५७६	२०५९६२९७६
१३४२२६५९३१०१५२४०१	११५८५६२०१

१६४. कोणत्याहि अपूर्णाकाचा वर्ग, त्याचे अंश आणि छेद यां-

\* मूळाचा दुसरा अंक, पहिल्या भाजकाशी मिळवावा ही वर सांगितल्यापेक्षां सरळ रीति आहे.

चा वर्ग केल्याने होतो, यामुळे अपूर्णाकाचे वर्गमूल, त्याचे अंश आणि छेद यांचे वर्गमूल काढण्याने होतें. जसे,  $\frac{२५}{६४}$  याचे वर्गमूल  $\frac{५}{८}$  आहे, कां की  $५ \times ५$  हे २५ आहेत, आणि  $८ \times ८$  हे ६४ आहेत. अंश किंवा छेद, हे दोन्ही वर्गसंख्या नसतील, तर त्या अपूर्णाकास वर्गमूल नाहीं असा निश्चय नाहीं; कां की त्याचे अंश आणि छेद काहीं एकच संख्येने गुणून, किंवा भागून, (१०८) प्रमाणे ते वर्गसंख्या होतील. जसे,  $\frac{२७}{४८}$ , यांचे वर्गमूल नाहीं असे पहिल्याने दिसते, परंतु त्यांस वर्गमूल आहे हें खरें, कां की  $\frac{२७}{४८}$  आणि  $\frac{१}{१६}$  हे दोन्ही सारखेच आहेत, आणि  $\frac{१}{१६}$  यांचे वर्गमूल  $\frac{१}{४}$  आहे.

१६५. आतां (१५८) या कलमापासून पुढें चालतों. त्या कलमांत असे सांगितलें कीं कोणतीहि संख्या किंवा अपूर्णाक दिला असतां, दुसरा अपूर्णाक किंवा संख्या काढितां येईल, आणि तिचा वर्ग त्या पहिल्या दिलेल्या संख्येचे हवा तेवढा जवळजवळ येईल. उदाहरण, असा एक अपूर्णाक काढ, कीं जाचा वर्ग २ होईल, हें कृत्य जरी उलगडत नाहीं, तथापि एक अपूर्णाक असा काढ, कीं जाचा वर्ग २ यांशीं ०००००००१ इतकेच अंतरानें जवळ होईल; हें कृत्य उलगडतां येईल. या अंतरापेक्षांहि लहान अपूर्णाक घेतां येईल; सारांश काहींएक अपूर्णाक हवा तेवढा लहान घेतां येईल; आणि अशा कृतीनें २ यांचे वर्गमूला जवळ जवळ तो अपूर्णाक येत जातो असें ह्मणतात. हें कोणत्याहि अवधीपर्यंत या पुढीलप्रमाणे करितां येईल; मनांत आण, कीं २ यांचे वर्गमूल  $\frac{१}{२७}$  इतक्याचे आंत खरें यावें असें इच्छिले आहे; ह्मणजे  $\frac{१}{२७}$  असा एक अपूर्णाक काढावा, कीं जाचा वर्ग २ पेक्षां कमी होईल. परंतु तो असा असावा कीं  $\frac{१}{२७} + \frac{१}{२७}$  यांचा वर्ग २ यांपेक्षां अधिक होईल.  $\frac{२}{२७}$  याचे अंश आणि छेद ५७ चे वर्गानें, अथवा ३२४९ यांशीं गुण, ह्मणजे  $\frac{६४९८}{३२४९}$  होतें. या अपूर्णाकाचे अंशांचे वर्गमूल काढण्याचे कृतींत, (१६३) प्रमाणे असें दिसते कीं ९८ बाकी राहातात, आणि ६४९८ यांचे खालची वर्ग संख्या ६४०० आहे, आणि तिचे वर्गमूल ८० आहे. यावरून ८० चा वर्ग ६४९८ यांपेक्षां कमी आहे, परंतु ८१ चा वर्ग त्यांपेक्षां अधिक आहे. अपूर्णाकाचे छेदाचे वर्गमूल अवश्य ५७ आहे. यामुळे  $\frac{६४९८}{३२४९}$  यांचा वर्ग  $\frac{६४९८}{३२४९}$  अथवा २ यांपेक्षां कमी आहे, परंतु  $\frac{६४९८}{३२४९}$  यांचा वर्ग २ यांपेक्षां अधिक आहे, आणि या दोन

अपूर्णाकांचें अंतर केवळ  $\frac{1}{20}$  इतकें आहे यावरून इच्छिलें उत्तर सिद्ध झालें.

१६६. वहिवाटीत काहीं दशांश पावेतो खरें असें वर्गमूल काढण्याची चाल आहे. जसें, २ यांचें चार दशांशस्थळांपावेतो खरें वर्गमूल १.४१४२ आहे, कां कीं १.४१४२ यांचा वर्ग, अथवा १.९९९९६१६४ हे २ पेक्षां कमी आहेत, परंतु त्यांतलें चवथे दशांशस्थळ १ याणें अधिक केलें, तर १.४१४३ होतात, यांचा वर्ग २.०००२४४४९ आहे, ह्मणजे हा वर्ग २ पेक्षां अधिक आहे. यापेक्षां एक साधारण पक्ष घे; मनांत आण, कीं चार दशांशस्थळांपावेतो खरें होण्यास १.६३७ यांचें वर्गमूल काढायाचें आहे. यांचें अपूर्णाकरूप  $\frac{1637}{1000}$  आहे, आणि यांचें वर्गमूल १.०००१, अथवा  $\frac{1}{10000}$  इतक्याचे आंत काढायाचें आहे. आतां त्या अपूर्णाकाचा छेद  $\frac{1}{10000}$  यांचा वर्ग होईपर्यंत त्याचे अंश आणि छेद यांवर शून्यें मांड, तर तो  $\frac{16370000}{100000000}$  याप्रमाणें होईल; (१६३) प्रमाणें अंशांचें वर्गमूल काढून, असें कळतें कीं त्याचे अति जवळची वर्गसंख्या १६३७००००००-१३५६४ आहे, जीचें वर्गमूल १२७९४ आहे. यावरून  $\frac{12794}{100000}$ , अथवा १.२७९४ यांचा वर्ग १.६३७ यापेक्षां कमी आहे, आणि १.२७९५ यांचा वर्ग १.६३७ यापेक्षां अधिक होतो. यावरून ते दोन्ही वर्ग १.६३६८६४३६ आणि १.६३७१२०२५ आहेत.

१६७. अमुक दशांशस्थळांपावेतो खरें वर्गमूल काढण्याची रीति; मूळांत जितकीं दशांशस्थळें असतील, त्या स्थळांची दुप्पट होईपर्यंत वर शून्यें मांड; आणि या संख्येचे जवळ जवळ वर्गमूल काढून सांगितलेले दशांशांचे अंक खुणेनें वेगळे कर. अथवा त्यापेक्षां ही पुढील रीति सोपी आहे; सांगितल्ये संख्येचे दोन दोन अंकांचे भाग कर, असे कीं, एक स्थळाचा अंक एका भागाचे उजव्येकडेस येईल; नंतर चालीप्रमाणें पुढें कर; आणि एकमाचे उजव्येकडेस दशांश असून, उजव्येकडेस नुसता एक अंक असला, तर त्यास खाली आणतेसमयी, त्यावर एक शून्य मांड, आणि त्याचे पुढील प्रत्येक भाग दोन शून्यांचा असावा. जा भागांत एक येतो त्याचे मूळाचे उजव्येकडे दशांशचिन्ह मांड.

१६८. उदाहरण, पांच दशांशस्थळांपावेतो  $1\frac{3}{4}$  यांचें वर्गमूल काय आहे! (१४५) प्रमाणें  $1\frac{3}{4}$  हे १.३७५ आहेत, आणि यांचें वर्गमूल काढण्याची रीति खाली दाखविल्याप्रमाणें आहे. सात दशांशस्थळां-

पावेतो ०८१ यांचें वर्गमूल काढण्याची रीति खालीं दाखविली आहे, या पक्षांत, पहिला भाग ०८ आहे, परंतु अनुपयोगी शून्य सोडिलें आहे.

१,३७,५(११७२६०

८,१(१२८४६०४९

१

४

२१)३७

४८)४१०

२१

३८४

२२७)१६५०

५६४)२६००

१५८९

२२५६

२३४२) ६१००

५६८६)३४४००

४६८४

३४११६

२३४४६) १४१६००

५६९२०४)२८४००००

१४०६७६

२२७६८१६

२३४५२) ९२४००

५६९२०८९)५६३१८४००

०००००२४१३६७२२२१(००१५५३५९९

१

२५)१४१

१२५

३०५)१६३६

१५२५

३१०३)१११७२

९३०९

३१०६५)१८६३२२

१५५३२५

३१०७०९)३०९९७१०

२७९६३८१

३०३३२९००

१६९. इच्छिलेल्या दशांशस्थळांचे अर्धापेक्षा अधिक स्थळे निघाल्यावर, (१५५) प्रमाणे केवळ भाज्य, भाजकाने भागून दुसरी दशांशस्थळे निघतील. हे दाखवायासाठी, १२ यांचे वर्गमूल दहा स्थळांपावेतो काढण्याची कृति खाली लिहिली आहे. परंतु या कृतीत, आणि जवळ जवळ येण्याचे दशांश काढण्याचा सर्व दुसऱ्या कृतीत, ही गोष्ट मनांत धरिली पाहिजे, कीं उजव्येकडचे शेवटील दशांश अंकावर नेहेमी भरंवसा ठेवत नाहीं; यास्तव खरे होण्यास जीं दशांशस्थळे अगत्य असावीं, त्यांपेक्षा एक किंवा दोन दशांशस्थळे अधिक निघतपावेतो कृति पुढे चालवावी.

(अ)

१२(३४६४१०१६१५१३

९

(ब)

६४)३००	६९२८२०३२३०२६	५३७२५३५५०८३१(७७५४५८७०५४९
२५६		४८४९७४२२६११८
६८६)४४००		५२२७९३२४७१३
४११६		४८४९७४२२६११
६९२४)२८४००		३७८१९०२१०२
२७६९६		३४६४१०१६१५
६९२८१)७०४००		३१७८००४८७
६९२८१		२७७१२८१२९
६९२८२०१)१११९००००		४०६७२३५८
६९२८२०१		३४६४१०१६
६९२८२०२६)४२६१७९९००		६०३१३४२
४१५६९२१५६		५५४२५६२
६९२८२०३२१)१०४८७७४४००		४८८७८०
६९२८२०३२१		४८४९७४
६९२८२०३२२५)३५५९५४००७९००		३८०६
३४६४१०१६१२५		३४६४
६९२८२०३२३०१)९५४३९१७७५००		३४२
६९२८२०३२३०१		२७७
६९२८२०३२३०२३)२६१५७१४५१९९००		६५
२०७८४६०९६९०६९		६२
६९२८२०३२३०२६)५३७२५३५५०८३१		३

जर कोणत्याही बाकीवरचीं शून्यें, आणि त्या शून्यां खालचे किंवा यांचे उजव्येकडील सर्व अंक एवढे उभे रेषेने वेगळे केले, तर त्या रेषेचे डाव्येकडेस (१५५) प्रमाणें संक्षेप भागाकार सांपडेल. जसें, १२४६४१०१ इतकीं मूळाचीं स्थळें निघाल्यावर, ४२६१७९९ हे अंक बाकी राहातात, आणि भाजक ६९२८२०२ होतो. जे अंक उभे रेषेचे डाव्येकडेस आहेत, ते वर सांगितलेली बाकी आणि भाजक यांचा संक्षेप भागाकार आहे. परंतु यांत भेद हाच, कीं त्या भाजकांतिल सर्व अंक एकदांच कामांत न घेतां, संक्षेप कृतीचा आरंभ करितेसमयां त्याचे उजव्ये बाजूकडून एक अंक छेकिला पाहिजे; केवळ याच रितीपासून दशांशाचे स्थळांची दुप्पट झाली असती, आणि पहिले सहास्थळांपेक्षां ६१५१३७ इतकीं अधिक स्थळें मिळालीं असती, आणि यांचे शेवटीं जे ७ आहेत, ते ५३ या बाकीशीं संक्षेप भागाकारानें एक पायरी पुढें चालल्यानें उत्पन्न होतात. यामुळे रीति याप्रमाणें आहे; जेव्हां दशांश स्थळांची अर्धी संख्या निघती, तेव्हां बाकीवर दोन शून्यें मांडण्याचे जागीं, कृति पुढें विस्तारानें चालली असतां जो भाजक असेल, त्याचे उजव्येकडील एक अंक छेकून (१५५) प्रमाणें त्या बाकीला संक्षेप भाजकानें भाग.

मनांत आण, कीं ३४६४१०१६१५१३ यांपेक्षां दुप्पट स्थळें काढायाचीं आहेत. ५३७२५३५५०८३१ ही बाकी आहे, आणि भाजक ६९२८२०३२३०२६ हा आहे, आणि (ब) प्रमाणें कृति पुढें चालत आहे. यावरून १२ चें वर्गमूल

३४६४१०१६१५१३७७५४५७७५४९ आहे.

हें तर उजव्येकडील शेवटचा अंकापावेतो खरें आहे, परंतु यत्किंचित् अधिक आहे; जर उजव्ये शेवटास ९ यांचे जागीं ८ मांडिले, तर तें कमी होईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

संख्या	वर्गमूळें.
१००१७२८	१०४१५६९२१९४
६४३४	८०२१२२१८५
८०७४	८९८५५४३९४
१०	३१६२२७७६६
१५७	१२५२९९६४०८६१४१६६७७८८४९५



## आठवा भाग.

## संख्यांचा प्रमाणाविषयी.

१७०. जेव्हा दोन संख्या कोणत्याहि कृत्यामध्ये सांगितल्या असतात, त्यांस कांहीं एक तऱ्हेने, पडताळून पहाण्याचें बहुतकरून अगत्य पडतें; ह्मणजे, त्या दोहोंचा परस्पर विचार करून, त्याचामध्ये असा कांहीं संबंध स्थापावा, कीं तो पुढचे कृतीमध्ये उपयोगी पडेल. हें जाणायासाठीं त्या दोन संख्यांतून मोठी कोणती, व तिचें आणि दुसऱ्याचें अंतर किती आहे हें पाहवें ही सरळ रीति आहे. दोन संख्यांमध्ये जो असा संबंध स्थापिलेला असतो, तोच संबंध दुसऱ्या दोन अंकांतहि असेल; उदाहरण, ८ आणि १९ यांचें अंतर ११ आहे, आणि १०० आणि १११ यांचेंहि तितकेंच अंतर आहे. अशा अर्थानें, १०० हे जसे १११ यांस आहेत, तसे ८ हे १९ सांस आहेत, ह्मणजे पहिल्या दोन संख्यांचें अंतर दुसऱ्या दोन संख्यांचे अंतराबरोबर आहे. सांगितलेल्या संख्या, ह्मणजे,

८, १९, १००, १११,

त्या परस्पर गणितप्रमाणांत आहेत असें ह्मणतात. असे तऱ्हेने चार अंक मांडिले असतां, पहिला आणि शेवटील या अंकांस आदिअंत अंक ह्मणतात, आणि दुसऱ्या आणि तिसऱ्या अंकांस मध्य अंक ह्मणतात. स्पष्ट आहे, कीं  $१११ + ८ = १०० + १९$ , ह्मणजे, आद्यंतांची बेरीज मध्यांचे बेरिजेबरोबर आहे. जे एथें विशेष अंक घेतले आहेत, त्यांपासून ही गोष्ट अवचित् घडती असें नाहीं, परंतु प्रत्येक गणितप्रमाणांत असे अवश्य घडतें; कां कीं (३५) प्रमाणें  $१११ + ८$  यांत, १११ तून कांहीं वजा केले, तितकेच ८ यांत मिळविले, तर बेरिजेत कांहीं अंतर पडणार नाहीं; आणि वर सांगितल्या व्याख्यानाप्रमाणें, एक मध्यांक जितका १११ पेक्षां कमी आहे, तितकाच दुसरा मध्यांक ८ पेक्षां अधिक आहे.

१७१. जेव्हा एकादे श्रेणींत जवळ जवळचा कोणत्याहि दोन पदांचें अंतर एकसारखेच असतें, तर ते अंक गणितश्रेणींत आहेत असें ह्मणतात. ही गोष्ट या पुढील श्रेणीवरून दिसेल;

१, २, ३, ४, ५, इत्यादि.

३, ६, ९, १२, १५, इत्यादि.

$1\frac{1}{2}$ , २,  $2\frac{1}{2}$ , ३,  $3\frac{1}{2}$ , इत्यादि.

प्रत्येक जवळ जवळचे दोन पदांचे अंतरास उत्तर ह्मणतात. वर सांगितलेल्या तीन श्रेणींत १, ३, आणि  $\frac{1}{2}$ , ही उत्तर आहेत.

१७२. जर एकाद्या गणित श्रेणीतील कांहीं पदे घेतलीं, तर पहिलें आणि शेवटील या पदांची बेरीज, श्रेणीचा दोन शेवटांपासून सारिखे अंतरावरचा कोणत्याहि दोन पदांचे बेरिजेबरोबर होईल. उदाहरण, श्रेणीचीं ७ पदे घेतलीं आहेत, तीं हीं पुढील आहेत,

अ, ब, क, ड, इ, फ, ग.

तर श्रेणीचे लक्षणावरून (१७०) प्रमाणें ब जितका अचे वर आहे, तितका फ, गचे खालीं आहे, ह्मणून  $अ + ग = ब + फ$ . पुनः (१७०) प्रमाणें क जितका बचे वर आहे, तितकी इ, फचेखालीं आहे, यावरून  $ब + फ = क + इ$ . परंतु  $अ + ग = ब + फ$  आहे, यामुळे  $अ + ग = क + इ$ , आणि याप्रमाणें पुढेहि. पुनः दोन्ही शेवटांपासून सारिखे अंतरावरचे पदांची, ह्मणजे मध्य पदाची दुप्पट अर्धात पदांचे बेरिजेबरोबर आहे, जेव्हां पदांची संख्या विषम असती तेव्हांही वरची गोष्ट घडती; कां कीं क जितका डचे खालीं आहे, तितकी इ, डचे वरतीं आहे, यावरून  $क + इ = ड + ड = २ड$ . परंतु  $क + इ = अ + ग$ ; यामुळे  $अ + ग = २ड$ . गणित श्रेणीचे कितीहि पदांची बेरीज काढण्याची संक्षिप्त रीति यावरून निघेल. मनांत आण, कीं वर सांगितलेलीं ७ पदे दिलीं आहेत.  $अ + ग$ ,  $ब + फ$ , आणि  $क + इ$ , या तिन्ही बेरजा सारिख्याच आहेत, यावरून त्या तिहींची बेरीज ( $अ + ग$ ) चे तिप्पट आहे, यांत जर मध्य पद ड, अथवा  $अ + ग$ चें अर्ध मिळविलें, तर ती बेरीज तीन वेळा आणि एक अर्धी वेळा  $अ + ग$  होईल, अथवा पहिल्या आणि शेवट पदांचे बेरिजेस  $३\frac{1}{२}$ , अथवा  $\frac{९}{२}$ , अथवा पदांचे संख्येचें अर्ध इतक्याने गुणिल्याचे बरोबर होईल. जर पदांची संख्या सम असेल, ह्मणजे जर अ, ब, क, ड, इ, आणि फ, इत्यादि सहा पदे असतील, आणि  $अ + फ$ ,  $ब + इ$ , आणि  $क + ड$  हीं सारिखींच आहेत असे कळतें, यावरून त्या पदांची बेरीज  $अ + फ$  यांचे तिप्पट आहे, अथवा

पूर्वाप्रमाणें अद्यंताचे बेरिजेस पद संख्येचे अर्धानें गुणवें इतक्या बरोबर त्या सर्व पदांची बेरीज आहे. यावरून रीति ही आहे; गणितश्रेणीं-तील कितीही पदांची बेरीज करणें, तर अद्यंताचे बेरिजेस पदसंख्येचे अर्धानें गुण. उदाहरण, १, २, ३, इत्यादि श्रेणींतील ९९ पदें मिळून बेरीज काय होईल? यांत ९९ वें पद ९९ आहे, आणि  $(९९+१) \frac{१}{२}$  अथवा  $\frac{१०० \times ९९}{२}$  अथवा ४९५० ही बेरीज आहे.  $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}, १, \frac{४}{३}, \frac{५}{३}, २,$  इत्यादि श्रेणीचे ५० पदांची बेरीज  $(\frac{१}{३} + \frac{५०}{३}) \frac{५०}{२}$ , अथवा  $१७ \times २५$ , अथवा ४२५ आहे.

१७३. श्रेणीचें पहिलें पद आणि उत्तर आणि पदसंख्या दिली असतां, उत्तर एकोनपद संख्येनें गुगून त्या गुणाकारांत पहिलें पद मिळवावें, झणजे शेवटील पद निघवें. कां कीं दुसरें पद पहिल्या पदाहून, उत्तरानें भिन्न आहे, तिसरें पद पहिल्या पदाहून उत्तराचे दुप्-टीनें भिन्न आहे, चवथें पद उत्तराचे तिपटीनें भिन्न आहे; आणि या-प्रमाणें पुढेंहि. अथवा न-१ इतके कृति क्रम केल्यानें पहिल्या पदा-पासून न पदापर्यंत जातां येतें, त्यांतून प्रत्येक क्रमांत उत्तर मिळवावें लागतें.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

दिलेलीं पदें.		काढायाचीं पदें.	
श्रेण्या.	पदसंख्या.	शेवटील पद.	बेरीज.
४, ६, ९, इत्यादि	३३	८४	१४५२
१, ३, ५, इत्यादि	२८	५५	७८४
२, २०, ३८ इत्यादि	१०००००	१७९९९८४	८९९९९३०००००

१७४. बेरीज, पदसंख्या, आणि पहिलें पद दिलें असेल, तर त्या-पासून उत्तर काढितां येईल. उदाहरण, एका श्रेणीचें पहिलें पद एक, पदसंख्या १००, आणि बेरीज १०००० आहे. पहिलें आ-णि शेवटील पद यांचे बेरिजेस  $\frac{१००}{२}$  यांनीं गुगून १०००० झाले आ-हेत, झगून जर त्यांस  $\frac{१००}{२}$  यांनीं भागिलें, तर आदिअंतांची बेरीज निघेल. आतां  $\frac{१००००}{१}$  भागिले,  $\frac{१००}{२}$  हे (११२) प्रमाणें २०० आहेत,

आणि पहिलें पद १ आहे, यावरून शेवटलें पद १९९ आहे. यावरून १ पासून १९८ अंकांतून ९९ वेळा सारख्या कृती केल्या असतां, १९९ पर्यंत जातां येईल. यावरून प्रत्येक पायरी  $\frac{१९८}{९९}$ , अथवा २ आहे, हें श्रेणीचें उत्तर आहे; अथवा १, ३, ५, इत्यादि १९९ पर्यंत दिलेली श्रेणी आहे.

दिलेलीं पदे.

काढायाचीं पदे.

वेरीज.	पदसंख्या.	पहिलें पद.	शेवटील पद.	उत्तर.
१८०९०२५	१३४५	१	२६८९	२
४४	१०	३	$\frac{३९}{५}$	$\frac{१४}{४५}$
७०७५६००	१३३०	४	१०६३६	८

१७५. (१७०) कलमामध्ये दोन संख्या त्यांचे अंतरानें पडताळून घ्याण्याचें जें सांगितलें, त्या गोष्टीचा एथें पुनः विचार करितों. असी पडताळण्याची रीति बहिवाटीचे कामांत आणीत नाहीं, ही गोष्ट परिपाठांतल्या एका उदाहरणापासून कळेल. उदाहरण, अ जवळ १०००० रुपये आणि ब जवळ ३००० रुपये असतील, तर ब पेक्षां अ फार द्रव्यवान आहे असें ह्मणण्यांत येईल; परंतु क जवळ १०७००० रुपये आणि ड जवळ १०००००० असतील, अशा दोहोंपक्षांत संपत्तीचें अंतर जरी सारखेंच ७००० रुपये आहे, तरी क हा ड पेक्षां फार धनवान आहे असें कोणी ह्मणणार नाहीं. संख्या पडताळण्याचे समर्थी केवळ त्यांचें अंतर लक्षांत घेतात असें नाहीं, परंतु त्या संख्याहि लक्षांत आणाव्या लागतात. जसें, ब आणि ड या दोघांस जर ७००० रुपये मिळाले, तर ब जवळ जें पूर्वी द्रव्य होतें, त्यांतील दर १०० स २३३ आणि  $\frac{१}{३}$  इतके रुपये मिळतील, परंतु डला दर १०० स केवळ ७ रुपये मिळतील. आणि जरी (१७०) कलमाचे दृष्टांताप्रमाणें, जितके १०७ यांचे जवळ १०० आहेत, तितके १० चे जवळ ३ आहेत, तथापि जा हेतूनें आतां त्यांचा विचार करितों, यावरून जितके १०० हे १०७ यांचे जवळ आहेत, तितके ३ हे १० चे जवळ नाहींत, कां कीं १० आणि ३ यांचें अंतर ३ चे दुपटीपेक्षां अधिक आहे, परंतु १०७ आणि १०० यांचें अंतर १०० चे एक पंचमांशा इतकेंहि नाहीं. यावरून गणिताचे भाषेप्रमाणें, या गोष्टीस असें ह्मणतात, कीं १०७ यांस १००, या प्रमाणापेक्षां १० यांस ३ हें प्रमाण अधिक आहे.

भातां प्रमाण या शब्दाचा अर्थ अधिक स्पष्ट करून पुढें सांगितों.

१७६. या भागांत पुढें जेव्हां संख्येचा किंवा अपूर्णाकाचा अंश असें लिहिण्यांत येईल, तेव्हां अर्धा भाग, तिसरा भाग, चवथा भाग, इत्यादि जा समभागांत ती संख्या भागिली असेल, त्यांतून १ भाग घेण्याचा आहे असें समजावें; गुणित या शब्दाचा अर्थ पूर्वी (१०२) कलमांत सांगितला आहे. संख्येचे अंशाचें गुणित, याचें संक्षेप वाक्य गुणित अंश असें आहे. जसें, १, २, ३, ४, आणि ६ हे, १२ यांचे अंश आहेत;  $\frac{१}{२}$  हाहि १२ यांचा एक अंश आहे, कां की  $\frac{१}{२}$  हा १२ यांत २४ वेळा जातो; १२, २४, ३६, इत्यादि हीं १२ यांचीं गुणितें आहेत; आणि ८, ९,  $\frac{५}{२}$ , इत्यादि हे १२ यांचे गुणितांश आहेत, कां की ते १२ चा कांहीं भागांचीं गुणितें आहेत. १२ यांस १२ चें एक गुणित ह्मणतात, कां की त्याचा गुणक १ आहे, या कारणावरून, जेव्हां विशेषेकरून गुणित भाग असें बोलण्यांत येतें तेव्हां ते भागहि त्यांत गणिले असतात. गुणितांश यांमध्ये गुणितेंहि येतात; कां की सगळे २४ हे ४८ अर्ध भाग आहेत, आणि यामुळे ते १२ चे गुणितांशांत येतात. प्रत्येक अंश वेगवेगळ्या तऱ्हेनें गुणितांश आहे; कां की एक चवथा भाग हा दोन आठवे भाग, आणि तीन बारावे भाग आहेत, इत्यादि.

१७७. प्रत्येक संख्या किंवा अपूर्णाक, दुसऱ्या प्रत्येक संख्येचा किंवा अपूर्णाकाचा गुणितांश आहे. जसें १२ हे ७ यांचा कोणता अंश आहे असें विचारिलें असतां, ७ यांस सात समभागांत विभागून, त्यांतून एक अंश १२ वेळा पुनःपुनः घेतला असतां १२ होतात; अथवा ७ यांस १४ समभागांत विभागिले, तर तो प्रत्येक अंश एक अर्धा बरोबर आहे, आणि यांतील १ अंश २४ वेळा पुनःपुनः घेतल्यानें, २४ अर्ध भाग, किंवा १२ होतात. यावरून, १२ हे ७ यांचे  $\frac{१२}{७}$ , अथवा  $\frac{२४}{७}$ , अथवा  $\frac{३६}{७}$  आणि इत्यादि असे आहेत. सामान्यतः जर अ आणि ब हे दोन पूर्ण संख्या असतील, तर ब चा अ कोणता गुणितांश आहे, तें  $\frac{अ}{ब}$  दाखवितो, आणि अ चा ब कोणता गुणितांश आहे तें  $\frac{ब}{अ}$  दाखवितो. पुनः मनांत आण कीं  $\frac{२१}{७}$  हे  $\frac{३१}{२}$  यांचा, किंवा  $\frac{१५}{७}$  हे  $\frac{१६}{२}$  यांचा कोणता गुणितांश असें विचारिलें आहे. या दोन अपूर्णाकांस सम-छेद करून,  $\frac{९५}{३६}$  आणि  $\frac{११३}{३६}$  होतात, यांतून दुसऱ्या अपूर्णाकास ११२

समभागांत विभागिलें तर प्रत्येक भाग  $\frac{1}{36}$  आहे, आणि हा एक भाग  $७५$  वेळा घेऊन  $\frac{७५}{३६}$  हा अपूर्णांक निघतो. यामुळें दुसऱ्या अपूर्णांकाचा  $\frac{७५}{११२}$  इतका गुणितांश पहिला अपूर्णांक आहे, असे गुणितांश (१२१) कलमाचे रीति प्रमाणें निघाले, आणि त्यांत भागाकाराविषयी जी गोष्ट सांगितली, ती प्रत्येक पक्षांत व चा अ कोणता गुणितांश आहे हें  $\frac{अ}{क}$ , अथवा अ भागला व अशानें दाखवितात.

१७८. जेव्हां चार संख्यांतून तिसरी संख्या चवथे संख्येचा जितका गुणितांश असतो, तितकीच जर पहिली संख्या दुसऱ्या संख्येचा गुणितांश असेल, तर त्या चार संख्या भूमितिप्रमाणांत, अथवा सरळ रीतीनें प्रमाणांत आहेत असें ह्मणतात. प्रमाण हा शब्द व्यवहारांत फार येतो; आणि व्यवहारांत जो अर्थ त्या शब्दास लाविला, तोच अर्थ त्या शब्दाचा वर दिलेल्या गणितानुरूप व्याख्यानान्त आहे, इतकें मात्र दाखवायें राहिलें. उदाहरण, मनांत आण, कीं एक नकाशाची नकल लहान भागावर करायाची आहे, अशी कीं, मूळचे नकाशावरची दोन इंच लांबीची रेष, नकलेचे नकाशावर एक इंच आणि एक अर्धा इंच लांबीची असावी; यावरून जर त्या नकाशाचे सर्व अवयव २ होंस  $१\frac{१}{२}$  याप्रमाणें कमी केले नसतील, तर ती नकल बरोबर नाही असें ह्मणता येईल. दोन इंच ४ भागांत विभागून, त्यांतून तीन भाग घेतल्यानें  $१\frac{१}{२}$  होतो, ह्मणून मूळचे नकाशातील सर्व रेषांशीं त्याच प्रमाणें केलें पाहिजे, ह्मणजे मूळचे नकाशातील कोणत्याहि रेषेचे चार भाग करून, त्यांतून तीन भागांनीं नकलेतील रेष केली पाहिजे. पुनः, व्याजाचा भाव शेंकडा ५ रुपये आहे, ह्मणजे १०० रुपयांचें व्याज ५ रुपये पडतें, तर यावरून दुसऱ्या कोणत्याहि रकमेचें व्याज देतां येईल; उदाहरण, ७० रुपयांचें व्याज काय होईल, तर ५ रुपये हे १०० रांचा जो अंश आहे, तितका ७० रांचा अंश ७० साठीं घेतला पाहिजे.

तर, जापेक्षां, व याचा जो अंश अ आहे, तो  $\frac{अ}{क}$ , किंवा त्याचे बरोबरीचा कोणत्याहि दुसऱ्या अपूर्णांकानें दाखवितां येतो, आणि डचा जो अंश क आहे तो  $\frac{क}{ड}$  याप्रमाणें दाखवितां येतो, यावरून अ, ब, क, आणि ड हे जेव्हां प्रमाणांत आहेत, तेव्हां  $\frac{अ}{क} = \frac{क}{ड}$ . प्रमाणांतील परिमाणांविषयी जे तर्क करायाचे आहेत, त्यांस या समीकरणाचा

आधार आहे; आणि प्रमाणांतील परिमाणांचा विचार करते-समयी, केवळ तीं परिमाणेंच लक्षांत आणिल्यानें निर्वाह होत नाहीं, परंतु त्यांचे क्रमहि लक्षांत घेतले पाहिजेत, जसें, अ, व, क, आणि ड, हे प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे व चा गुणितांश जितका अ आहे, तितकाच डचा गुणितांश क आहे, तथापि अ, ड, व, आणि क, हे प्रमाणांत आहेत, असें ह्मणतां येत नाहीं, कारण कचा जितका व गुणितांश आहे, तितकाच डचा गुणितांश अ आहे, हें सिद्ध होत नाहीं. ड पेशां क जसा अधिक, किंवा त्याचे बरोबर, किंवा त्यापेशां कमी आहे, तसा व पेशां अ अधिक, किंवा त्याचे बरोबर, किंवा त्यापेशां कमी, असावा हें स्पष्ट आहे.

१७९. अ, व, क, आणि ड, अशा क्रमानें ह्या चार संख्या जर प्रमाणांत असतील, तर अ, आणि ड यांस आदिअंत, आणि व आणि क यांस याप्रमाणांचे मध्य ह्मणतात. सोईकरितां, आदि अंत, अथवा मध्य पदें यांस सरूपपदें, आणि एक शेषटीलपद आणि एकमध्यपद यांस विरूपपदें असें ह्मणले आहे. जसें अ आणि ड, आणि व आणि क हीं सरूपपदें आहेत; अ आणि व, अ आणि क, ड आणि व, ड आणि क हीं विरूपपदें आहेत. प्रमाण दाखविण्याकरितां पदांमध्ये खालचे प्रमाणें त्रिदू मांडण्याची रीति आहे, जसें;

$$अ : व :: क : ड$$

१८०. जा संख्या परस्पर बरोबर आहेत, त्या सारख्यांच परिमाणानें वाढविल्या, किंवा कमी केल्या, किंवा गुणिल्या, किंवा भागिल्या, तरी बरोबर राहातील. ही गोष्ट या ह्मणण्याप्रमाणें आहे, कीं जर  $अ = व$ , आणि  $प = क$ , तर  $अ + प = व + क$ ,  $अ - प = व - क$ ,  $अ \times प = व \times क$ , आणि  $\frac{अ}{व} = \frac{क}{प}$ .  $अ + प - प$ ,  $अ - प + प$ ,  $\frac{अ \times प}{प}$ , आणि  $\frac{अ}{व} \times प$  हीं सर्व अचे बरोबर आहेत हें स्पष्ट आहे.

१८१. आदिअंतांचा गुणाकार मध्य पदांचे गुणाकाराबरोबर आहे.  $\frac{अ}{व} = \frac{क}{ड}$  असी कल्पना कर, या दोन बरोबरीचे संख्यांस वडचे गुणाकारानें गुण. तर,  $\frac{अ}{व} \times वड = \frac{अ \times वड}{व}$  (११६) प्रमाणें = अड, आणि  $\frac{क}{ड} \times वड = \frac{क \times वड}{ड} = कव$ ; यावरून (१८०) प्रमाणें अड = कव. जसें, ६, ४, २१, आणि २८, ह्या संख्या प्रमाणांत आहेत, कां कीं  $\frac{६}{४} = \frac{२१}{२८}$  आणि (१८०)

प्रमाणे  $= \frac{3 \times 9}{8 \times 9} = \frac{3}{8}$ ; आणि असें दिसतें कीं  $६ \times २८ = ८ \times २१$ , कां कीं ते दोन्ही गुणाकार १६८ आहेत.

१८२. जर दोन संख्यांचा गुणाकार दुसऱ्या दोन संख्यांचा गुणाकाराबरोबर असेल, आणि जर त्यांतील कोणत्याहि गुणाकाराचा दोन संख्या सरूप पदें होतील, अशा रितीनें मांडिल्या तर त्या संख्या कोणत्याहि क्रमानें प्रमाणांत होतील; ह्मणजे, जर  $अब = पक$ , तर हीं पुढील प्रमाणें निघतील;—

$$अःप :: कःब$$

$$पःअ :: बःक$$

$$अःक :: पःब$$

$$पःब :: अःक$$

$$बःप :: कःअ$$

$$कःअ :: बःप$$

$$बःक :: पःअ$$

$$कःब :: अःप$$

यांतून कोणतेंहि एक प्रमाण पडताळून पहाण्यासाठीं, अब आणि पक या दोहोंस त्याचा दुसऱ्या आणि चवथ्या पदांचे गुणाकारानें भाग; उदाहरण, अःक :: पःब, यांचा खरेपणा दाखवायासाठीं, अब आणि पक या दोहोंस बक यांणीं भाग. तर  $\frac{अब}{बक} = \frac{अ}{क}$ , आणि  $\frac{पक}{बक} = \frac{प}{ब}$ ; यावरून (१८०) प्रमाणें  $\frac{अ}{क} = \frac{प}{ब}$ , अथवा अःक :: पःब. वरचे सर्व आठ पक्ष शिकणारानें पडताळून पहावे, आणि कांहीं सरळ उदाहरणें सिद्ध करावीं, जसें  $१ \times ६ = २ \times ३$ , यावरून जसा  $१ः२ :: ३ः६$ , आणि  $३ः१ :: ६ः२$ , इत्यादि.

१८३. यावरून, जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, आणि त्यांतील सरूप पदें सरूप पदांचे स्थळीं रहातील अशा रितीनें जर त्या मांडिल्या, तर त्या चार संख्या कोणत्याहि दुसऱ्या क्रमानें प्रमाणांत होतील. कां कीं, जापेक्षां  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ , तर (१८१) प्रमाणें अड = बक, तेव्हां अड = बक यापासून मागील कलमाप्रमाणें सर्व जीं प्रमाणें होतात, तीं  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$  यापासूनहि होतील.

१८४. (११४) व्हे कलमापासून  $१ + \frac{अ}{ब} = \frac{ब+अ}{ब}$ , असें होतें, आणि जर १ पेक्षां  $\frac{अ}{ब}$  कमी असेल, तर  $१ - \frac{अ}{ब} = \frac{ब-अ}{ब}$ , परंतु जर १ पेक्षां  $\frac{अ}{ब}$  अधिक असेल, तर  $\frac{अ}{ब} - १ = \frac{अ-ब}{ब}$ . आणि (१२२) प्रमाणें, जर  $\frac{अ+ब}{ब}$  यांस  $\frac{अ-ब}{ब}$  यांणीं भागिलें, तर भागाकार  $\frac{अ+ब}{अ-ब}$  होतो. यावरून, अ, ब, क, आणि ड, हे प्रमाणांत असतील, तर त्यांपासून हीं पुढील दुसरीं प्रमाणें निघतील, जसें;



$$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड} \text{ आहे असे मनांत आण,}$$

$$\text{तर (११४) प्रमाणें } १ + \frac{अ}{ब} = १ + \frac{क}{ड}$$

$$\text{अथवा, } \frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड}$$

$$\text{अथवा } अ + ब : ब :: क + ड : ड.$$

ह्मणजे जशी पहिल्या आणि दुसऱ्या पदांची बेरीज, दुसऱ्या पदास आहे, तशी तिसऱ्या आणि चवथ्या पदांची बेरीज, चवथ्या पदास आहे. या वेगळाल्या प्रमाणांविषयीं पुढें शब्दांनीं कांहीं विस्तार करून सांगणार नाहीं, कां कीं शिकणारास आपल्या कल्पनेवरून समजेल.

$$अ : ब :: क : ड.$$

$$\text{अथवा } \frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड} \text{ हें प्रमाण पुनः घे.}$$

$$\text{जर १ पेक्षां } \frac{अ}{ब} \text{ कमी असेल, तर } १ - \frac{अ}{ब} = १ - \frac{क}{ड},$$

$$\text{अथवा } \frac{ब-अ}{ब} = \frac{ड-क}{ड}$$

$$\text{ह्मणजे, } ब-अ : ब :: ड-क : ड,$$

$$\text{अथवा जर १ पेक्षां } \frac{अ}{ब} \text{ अधिक असेल, तर } अ-ब : ब :: क-ड : ड.$$

$$\text{पुनः, जापेक्षां } \frac{अ+ब}{ब} = \frac{क+ड}{ड}, \text{ आणि १ पेक्षां } \frac{अ}{ब} \text{ अधिक असून } \frac{अ-ब}{ब} = \frac{क-ड}{ड},$$

$$\text{यांतील पहिलीं दोन पदे दुसऱ्यांनीं भागून } \frac{अ+ब}{अ-ब} = \frac{क+ड}{क-ड} \text{ असें होतें,}$$

$$\text{अथवा } अ+ब : अ-ब :: क+ड : क-ड.$$

$$\text{जर १ पेक्षां } \frac{अ}{ब} \text{ कमी असेल, तर } अ+ब : ब-अ :: क+ड : ड-क.$$

१८५. अशा तऱ्हेनें अनेक दुसरीं प्रमाणें निघतील. परंतु मागील कलमावरून जीं प्रमाणें निघतात, त्यांतून कांहीं थोडीं दाखवितों.

$$अ+ब : अ :: क+ड : क$$

$$अ : अ-ब :: क : क-ड$$

$$अ+क : अ-क :: ब+ड : ब-ड.$$

यांत आणि सर्व दुसऱ्या पक्षांत ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे, कीं जेव्हां अ-ब आणि क-ड अशा पद्धती येतात, तेव्हा बपेक्षां अ मोठा, आणि डपेक्षां क मोठा आहे असें समजावें.

१८६. जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, आणि त्यांचीं कोणतीं-

हि दोन विरूप पदें एक परिमाणानें गुणिलीं, किंवा भागिलीं, तर ती प्रमाणांत राहातात. जसें, जर अ : ब :: क : ड, आणि म आणि न ह्या भलत्या कांहीं संख्या असतील, तर हीं पुढील प्रमाणें निघतील;

$$मअ : ब :: मक : ड$$

$$मअ : नब :: मक : नड$$

$$अ : मब :: क : मड$$

$$\frac{अ}{म} : \frac{ब}{म} :: \frac{क}{म} : \frac{ड}{म}$$

$$\frac{अ}{न} : \frac{मब}{न} :: \frac{क}{न} : \frac{मड}{न}$$

$$\frac{अ}{म} : \frac{ब}{म} :: \frac{क}{न} : \frac{ड}{न}$$

आणि यांशिवाय अनेक दुसरींहि निघतील. यांतील कोणत्याचाहि खरेपणा सिद्ध करितेसमयीं, हें मनांत ठेविलें पाहिजे, कीं चार संख्या परस्पर प्रमाणांत होण्यासाठीं, आदिअंतांचा गुणाकार, मध्यांचे गुणाकाराबरोबर असावा. वरचें तिसरें उदाहरण घेऊन पाहा; त्याचे आदिअंतांचा गुणाकार  $\frac{अ}{न} \times मड$  अथवा  $\frac{मअड}{न}$  आहे, आणि त्याचे मध्यांचा गुणाकार  $मब \times \frac{क}{न}$ , अथवा  $\frac{मबक}{न}$  आहे. परंतु जापेक्षां अ:ब::क:ड, तर (१८१) प्रमाणें अड=बक, यावरून, (१८०) प्रमाणें मअड=मबक, आणि  $\frac{मअड}{न} = \frac{मबक}{न}$ . यावरून,  $\frac{अ}{न}$ ,  $\frac{मब}{न}$ ,  $\frac{क}{न}$ , आणि  $\frac{मड}{न}$ , हे प्रमाणांत आहेत.

१८७. जरी एक प्रमाणाचीं पदें दुसऱ्या प्रमाणाचे पदांनीं गुणिलीं, तरी ते वेगळाले गुणाकार प्रमाणांत होतील; ह्मणजे, जर अ:ब::क:ड, आणि प:क::र:स, तर अप:बक::कर:डस असें होईल. कां कीं, जापेक्षां अड=बक आहे, आणि पस=कर आहे, तर (१८०) प्रमाणें अडपस=बककर, अथवा अप×डस=बक×कर, यावरून (१८२) प्रमाणें अप : बक :: कर : डस.

१८८. जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, तर त्या संख्यांचे सारिखे घात प्रमाणांत होतील; ह्मणजे, जर

$$अ : ब :: क : ड$$

$$\text{तर अअ} : बब :: कक : डड$$

$$\text{अअअ} : बबब :: ककक : डडड$$

इत्यादि. इत्यादि.

कां कीं, जर प्रमाण दोन वेळा मांडिलें, जसें,

अ:व::क:ड

अ:व::क:ड

तर (१८७) प्रमाणे, अअ:वव::कक:डड,

परंतु

अ:व::क:ड

तर (१८७) प्रमाणे, अअअ:ववव::ककक:डडड; आणि याप्रमाणे पुढेहि.

१८९. जेव्हां एकाद्ये पद्धतींत अ, व, आणि क, इत्यादि दोन किंवा अधिक अक्षरे येतात, आणि त्या पद्धतीतील प्रत्येक पदामध्ये अ, व, आणि क ह्याच अक्षरांची सारिखी संख्या असती, त्या पद्धतीस त्या अक्षरांविषयीं सजातीय असें ह्मणतात. जसें, मअअव+नअवक+रककक ही पद्धती अ, व, आणि क, या अक्षरांविषयीं सजातीय आहे; आणि ती तिसऱ्या वर्णाची आहे, कां की त्यांतील प्रत्येक पदांत तीन तीन अक्षरे यावीं, ह्मणून कोठें एकादे पदांत अ, व, आणि क, हीं अक्षरे आहेत, अथवा त्यांतून एकच अक्षर वारंवार लिहिलें आहे, अथवा एक अक्षर कांहीं वेळा लिहून त्याचे जवळ दुसरें लिहिलें आहे. जसें, ८अअवक, १२अवककक, मअअअअ, नअअववक, हीं सर्व पदे अ, व, आणि क, या अक्षरांविषयीं मात्र सजातीय आणि पांचव्या वर्णाचीं आहेत; आणि हीं पदे परस्परांस मिळवून, अथवा परस्परांतून वजाकरून, जी पद्धती उत्पन्न होईल, ती त्या अक्षरांविषयीं सजातीय असून, पांचव्या वर्णाची होईल. पुनः मअ+मनव ही पद्धती, अ आणि व अक्षरांविषयीं सजातीय आणि पहिल्या वर्णाची आहे; परंतु म आणि न, अक्षरांविषयीं सजातीय नाहीं, तथापि अ आणि न अक्षरांविषयीं सजातीय आहे. इतकें आरंभी सांगितल्यावर आतां एक सिद्धांत\*सांगतो त्यांत (१८४), (१८५) आणि (१८८), या कलमांतील गोष्टी येतील.

१९०. जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, आणि जर अ आणि व अशा दोन पहिल्या संख्यांपासून, सारख्याच वर्णाचा कोणत्याहि दोन सजातीय पद्धती उत्पन्न केल्या, आणि शेवटील दोन संख्यांपासून,

\*सिद्धांत ह्मणजे गणितांतल खरी गोष्ट आहे: जसें, जा संख्येचे उजव्येकडील शेवटचे दोन अंक चौहोंनीं निःशेष भागिले जातात, ती सर्व संख्या चौहोंनीं निःशेष भागिली जाईल हा एक सिद्धांत आहे; प्रत्येक प्रमाणांत आदिअंतांचा गुणाकार, मध्याचे गुणाकाराबरोबर आहे, हा दुसरा सिद्धांत आहे.

वरचे सारिख्या दुसऱ्या दोन पद्धती उत्पन्न केल्या, तर ह्या चार पद्धती प्रमाणांत होतील. उदाहरण, जर अः बः कः ड आणि २अअ + ३अअव आणि बबव + अवव ह्या दोन्ही, अ आणि बयांविषयीं सजातीय असून तिसऱ्या वर्णाचा आहेत; आणि जर अ आणि ब पासून जशा पूर्वीचा दोन पद्धती निघाल्या, तशा २ककक + ३ककड आणि डडड + कडड ह्या क आणि ड यांपासून झाल्या असतील, तर

२अअअ + ३अअव : बबव + अवव :: २ककक + ३ककड : डडड + कडड ला होईल.

हे सिद्ध करायास,  $\frac{अ}{ब}$  दाखवायासाठीं क्ष घे. तर, जापेक्षां  $\frac{अ}{ब} = क्ष$ , आणि  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ , यामुळे  $\frac{क}{ड} = क्ष$ . परंतु जापेक्षां अ यास ब याणें भागिल्यानें क्ष होतो, तर क्ष यास ब याणें गुणिल्यानें अ होईल, अथवा अ = बक्ष. तसेच कारणानें, क = डक्ष. वरचा चार दिलेल्या पद्धतींमध्ये अ आणि क यांचें जागीं बक्ष आणि डक्ष मांड, आणि ही गोष्ट मनांत ठेविली पाहिजे कीं, अनेक परिमाणें परस्पर गुणून, त्यांची रचना कोणत्याहि क्रमानें केली, तरी गुणाकार सारिखेच होतील; ह्मणजे, बक्षबक्षबक्ष आणि बबबक्षक्ष ह्या पद्धती सारिख्याच आहेत.

$$\begin{aligned} \text{यावरून,} \quad २अअअ + ३अअव &= २बक्षबक्षबक्ष + ३बक्षबक्षव \\ &= २बबबक्षक्षक्ष + ३बबबक्षक्ष \end{aligned}$$

ही तर बबव गुणिली २क्षक्षक्ष + ३क्षक्ष असी आहे,

$$\text{अथवा बबव}(२क्षक्षक्ष + ३क्षक्ष)^*$$

$$\text{याच सारिखें, } २ककक + ३ककड = डडड(२क्षक्षक्ष + ३क्षक्ष)$$

$$\text{आणि, बबव + अवव} = \text{बबव} + \text{बक्षबव}$$

$$= \text{बबव गुणिला } १ + क्ष$$

$$\text{अथवा} = \text{बबव}(१ + क्ष)$$

$$\text{याच सारिखें, डडड + कडड} = \text{डडड}(१ + क्ष)$$

$$\text{आतां, बबव : डडड :: बबव : डडड}$$

\* अ आणि बविषयीं कोणतीहि पद्धती सजातीय असेल, आणि त्या पद्धतींत अचे जागीं बक्ष मांडिला तर शिकणाराला सहज दिसेल, कीं त्या पद्धतींत जितकीं अंकस्थळें आहेत तितक्या वेळा वारंवार पदामध्ये ब येईल, जसें, अअ + अब ही बक्षबक्ष + बक्षव अथवा, बब + (क्षक्ष + क्ष) असी होईल; अअअ + बबव, ही पद्धती बक्षबक्षबक्ष + बबव, अथवा बबव(क्षक्षक्ष + १) असी होईल; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

यावरून (१८६) प्रमाणें, बबव(२क्षक्ष + ३क्षक्ष) : डडड (१+क्ष) :: बबव(२क्षक्ष + ३क्षक्ष) : डडड(१+क्ष) असें आहे, ह्मणून त्या पद्धतीचे बरोबर वर पद्धती निघाल्या, त्यांस ह्यांचे जागी मांडल्या असतां याप्रमाणें होतें, २अअ+३अअव : बबव+अबव :: २कक+३ककड : डडड+कडड. कोणत्याहि दुसऱ्या पक्षास हीच कल्पना लागू होईल, आणि या पुढील सिद्धांताचा खरेपणा शिकणारास असे तऱ्हेने दाखवितां येईल;

$$\text{जर } अ : ब :: क : ड$$

$$\text{तर } २अ+३ब : ब :: २क+३ड : ड$$

$$\text{अअ+बव : अअ-बव :: कक+डड : कक-डड}$$

$$\text{मअव : २अअ+बव :: मकड : २कक+डड}$$

१९१. जर प्रमाणांतील दोन मध्य पदे सारिखींच असतील, ह्मणजे जर अ : ब :: ब : क, तर अ, ब, आणि क, ह्या तीन संख्या अखंड प्रमाणांत, अथवा भूमिती श्रेणींत आहेत असें ह्मणतात. जा श्रेणीचीं एका पुढील एक अशीं कोणतींहि तीन पदे अखंड प्रमाणांत असतील, त्या श्रेणीस वरचें नाव देतात, जसें,

$$१ \quad २ \quad ४ \quad ८ \quad १६ \quad ३२ \quad ६४ \quad \text{इत्यादि.}$$

$$२ \quad \frac{२}{३} \quad \frac{२}{९} \quad \frac{२}{२७} \quad \frac{२}{८१} \quad \frac{२}{२४३} \quad \frac{२}{७२९} \quad \text{इत्यादि.}$$

हीं अखंड प्रमाणांत आहेत, कां कीं

$$१ : २ :: २ : ४$$

$$२ : ४ :: ४ : ८$$

इत्यादि.

$$२ : \frac{२}{३} :: \frac{२}{३} : \frac{२}{९}$$

$$\frac{२}{३} : \frac{२}{९} :: \frac{२}{९} : \frac{२}{२७}$$

इत्यादि.

१९२. अ, ब, क, ड, इ, इत्यादि अखंड प्रमाणांत आहेत, असें मनांत आण; तर

$$अ : ब :: ब : क$$

अथवा

$$\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क}$$

अथवा

$$अक = बब$$

$$ब : क :: क : ड$$

अथवा

$$\frac{ब}{क} = \frac{क}{ड}$$

अथवा

$$बड = कक$$

$$क : ड :: ड : इ$$

अथवा

$$\frac{क}{ड} = \frac{ड}{इ}$$

अथवा

$$कइ = डड$$

प्रत्येक पदास कांहीं सारिखेच परिमाणानें गुणिल्यानें त्याचा पुढलें पद होतें.

जसें, (१८०) प्रमाणें  $v = \frac{v}{a} \times a$ ;  $k = \frac{k}{v} \times v$ ; आतां जापेक्षां  $\frac{a}{v} = \frac{v}{k}$ ,  $\frac{v}{a} = \frac{k}{v}$ , अथवा  $k = \frac{v}{a} \times v$ . पुनः  $d = \frac{d}{k} \times k$ , परंतु  $\frac{d}{k} = \frac{k}{v}$ , आणि  $\frac{k}{v} = \frac{v}{a}$ ; यामुलें  $d = \frac{v}{a} \times k$ , आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून  $\frac{v}{a}$  यास श्रेणीचें साधारण गुणोत्तर ह्मणतात, आणि त्याचे जागीं र घेतला असतां, या पुढील प्रमाणें होईल,

$$v = अर \quad k = वर = अरर \quad d = कर = अररर$$

आणि याप्रमाणें पुढेंहि; यावरून

अ व क ड इ इत्यादि ही श्रेणी  
अ अर अरर अररर अरररर इत्यादि. याप्रमाणें  
यावरून अ : क :: अ : अरर आहे.

(१८६) प्रमाणें :: अअ : अअरर  
:: अअ : वव

कां कीं,  $v = अर$  आहे, तर  $वव = अरअर$  अथवा अअरर. पुनः,  
अ : ड :: अ : अररर

(१८६) प्रमाणें :: अअअ : अअअररर  
:: अअअ : ववव

आणि अ : इ :: अअअअ : वववव, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. ह्मणजे पहिलें पद आणि तें सोडून न पद या दोहों मधलें प्रमाण, पहिल्या पदाचा न घात, आणि दुसऱ्या पदाचा न घात या दोहों मधील प्रमाणावरोबर आहे.

१९३. अखंड प्रमाणांतील पदांचें सर्वधन काढण्याची सोपी रीति काढितां येईल. १, र, रर, इत्यादि, पदांचें सर्वधन काढण्याची इच्छा आहे असे मनांत आण, आणि यांत एकापेक्षां र अधिक आहे असे मनांत आण. कोणत्याही पद्वर्तांत कांहीं संख्या मिळवून, ती लागलीच वजा केल्यानें त्या पद्वर्तीमध्ये भेद होत नाही. उदाहरण,

$$प = प - क + क - र + र - स + स$$

आतां, १, र, रर, इत्यादि या श्रेणीचीं चार पदे, अथवा

$$१ + र + रर + ररर \text{ घे}$$

स्पष्ट आहे, कीं

$$रररर - १ = रररर - ररर + ररर - रर + रर - र + र - १$$

आतां (५४) प्रमाणें  $रर - र = र(र - १)$ ,  $ररर - रर = रर(र - १)$ ,  $रररर - ररर = ररर(र - १)$ , आणि वरचें समीकरण याप्रमाणें होतें,  $रररर - १ = ररर(र - १) + रर(र - १) + र(र - १) + र - १$ ; हें (५४) प्रमाणें  $ररर + रर + र + १$  यांस  $र - १$  वेळा घेतले असे आहेत. यावरून,  $रररर - १$  यांस  $र - १$  यांणीं भागिलें, तर  $१ + र + रर + ररर$  होतात, हें पदांचें सर्वधन आहे. याच तऱ्हेनें समीकरणाची ही पुढील श्रेणी सिद्ध होईल.

$$\begin{aligned} १ + र &= \frac{रर - १}{र - १} \\ १ + र + रर &= \frac{ररर - १}{र - १} \\ १ + र + रर + ररर &= \frac{रररर - १}{र - १} \\ १ + र + रर + ररर + रररर &= \frac{ररररर - १}{र - १} \end{aligned}$$

जर एकापेक्षां र कमी असेल, तर  $१ + र + रर + ररर$  यांचें सर्वधन काढायासाठीं, लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं

$$१ - रररर = १ - र + र - रर + रर - ररर + ररर - रररर$$

$$= १ - र + र(१ - र) + रर(१ - र) + ररर(१ - र);$$

यावरून, वरचे कल्पनेप्रमाणें,  $१ + र + रर + ररर$  ही  $१ - रररर$  यांस  $१ - र$  यांणीं भागिल्यानें होईल; क्षणजे अशांनें वरचे सारिखीच समीकरणें निघतील,

$$\begin{aligned} १ + र &= \frac{१ - रर}{१ - र} \\ १ + र + रर &= \frac{१ - ररर}{१ - र} \\ १ + र + रर + ररर &= \frac{१ - रररर}{१ - र} \\ १ + र + रर + ररर + रररर &= \frac{१ - ररररर}{१ - र} \end{aligned}$$

रीति; १+२+२२+इत्यादि, असे श्रेणीचे न पदांचे सर्वधन काढा-  
यासाठी, १ आणि (न+१) वे पद यांची वजाबाकी, १ आणि २  
यांचे वजाबाकीने भाग.

१९४. अखंड प्रमाणाचीं कितीहि पदे असलीं, तरी त्यांचे सर्वधन  
काढायास वरची रीति लागू होती. अ, व, क, इत्यादि, पदे आहेत,  
त्यांतून चार पदांपर्यंत सर्वधन इच्छिले आहे, ह्मणजे अ+व+क+ड  
यांचे सर्वधन काढायाचे आहे; हे (१९२) प्रमाणे, अ+अर+अरर+अररर  
असे आहे, अथवा (५४) प्रमाणे अ(१+२+२२+२२२), हे (१९३) प्र-  
माणे जर र एकापेक्षां अधिक किंवा कमी असेल, तर  $\frac{रररर-१}{र-१} \times अ$ ,  
अथवा  $\frac{१-रररर}{१-र} \times अ$ , असे होईल. यांतून पहिला अपूर्णांक  $\frac{अरररर-अ}{र-१}$   
आहे, अथवा (१९२) प्रमाणे  $\frac{६-अ}{२-१}$  असा आहे. त्याचसारखा, दुसरा  
अपूर्णांक  $\frac{अ-६}{१-२}$  असा आहे. यामुळे रीति हीच आहे; कोणत्याहि अ-  
खंड प्रमाणाचा न पदांचे सर्वधन काढायासाठी, न+१ वे पद आणि प-  
हिले पद यांची वजाबाकी, एक आणि पदांचे गुणोत्तर यांचे वजाबा-  
कीने भाग. उदाहरण, १+३+९+२७+ इत्यादि या श्रेणीचे १०  
पदांचे सर्वधन काढायाचे आहे असे मनांत आण. या श्रेणीचे ११  
वे पद ५९०४९ आहे, आणि  $\frac{५९०४९-१}{३-१} = २९५२४$  हे सर्वधन आहे.  
पुनः, २+१+ $\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{४}$ + इत्यादि या श्रेणीचे १८ पदांचे सर्वधन का-  
ढायाचे असेल, तर तिचे एकुणिसावे पद  $\frac{१}{१३१०७२}$  आहे, यावरून  
 $\frac{२-\frac{१}{१३१०७२}}{१-\frac{१}{२}} = ३\frac{१३१०७०}{१३१०७२}$  हे सर्वधन आहे.

उदाहरणे.

१+४+१६+ इत्यादि या श्रेणीचा ९ पदांचे सर्वधन ८७३८१ आहे.

$$\begin{array}{l} ३+\frac{६}{७}+\frac{१२}{४९}+\dots\dots\dots १० \dots\dots\dots \frac{८४७४२२६७५}{२०१७६८०३५} \dots\dots\dots \\ \frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\dots\dots\dots २० \dots\dots\dots \frac{१०४८५७५}{१०४८५७६} \dots\dots\dots \end{array}$$

१९५. जी संख्या किंवा अपूर्णांक एकापेक्षां अधिक आहे, तिचे  
घात वाढत जातात; कां कीं जापेक्षां २ $\frac{१}{२}$  हे १ पेक्षां अधिक आहेत,  
२ $\frac{१}{२}$ ×२ $\frac{१}{२}$  यांत २ $\frac{१}{२}$  हे एक वेळेपेक्षां अधिक वेळा घेतले आहेत, ह्मणजे तो



गुणाकार  $२\frac{१}{२}$  यापेक्षा अधिक आहे, आणि याप्रमाणे पुढेहि. ही वाढ अनंत होत जाती; ह्मणजे, कसेंहि अति मोठे परिमाण घेतले, तरी  $२\frac{१}{२}$  यांचा एकादा घात त्याहून अधिक होईल. हें सिद्ध करायासाठी, लक्षांत आणिले पाहिजे, कीं  $२\frac{१}{२}$  यांचा प्रत्येक घात त्याचे पूर्वीचे घातास  $२\frac{१}{२}$  यांणी, अथवा  $१+१\frac{१}{२}$  यांणी गुणिल्याने होतो, ह्मणजे पूर्वीचे घातास तोच घात आणि त्याचें अर्ध मिळविल्याने पुढचा दुसरा घात होतो. यामुळे १० वे पद करायासाठी, जें ९ वे घातास मिळविलें, त्यापेक्षां ११ वे पद करायास, १० व्हे घातास अधिक मिळवावें लागतें. परंतु स्पष्ट आहे कीं कोणतेंहि सांगितलें परिमाण, कसेंहि लहान असलें, आणि तें वारंवार  $२\frac{१}{२}$  यांशीं मिळविलें, तर त्याचें सर्वधन, कोणतीहि दुसरी सांगितली संख्या कशीहि मोठी असेल, तरी तिजपेक्षां अधिक होईल; यामुळे  $२\frac{१}{२}$  यांस प्रत्येक पायरीवर मिळविण्याचें परिमाण अधिक अधिक वाढवीत गेलें असतां, सर्वधन खचित् अधिक मोठें होईल, यावरून  $२\frac{१}{२}$  यांचे एका पुढले एक घात काढिल्यावरून असा पक्ष दिसेल. आणि हेंहि स्पष्ट आहे, कीं १ याचा घात कधीं वाढत नाही, कां कीं तो नेहमी १ आहे; जसें,  $१ \times १ = १$ , इत्यादि. आणि, जर म वेळा व पेक्षां अधिक असेल, तर अचा वर्ग मम वेळा वचे वर्गाहून अधिक होईल. जसें, जर  $अ = २ब + क$ , यांत २व पेक्षां अधिक आहे, तर अचा वर्ग, अथवा  $अब$ ,  $(६८)$  प्रमाणे  $४बब + ४बक + कक$ , हा  $४बब$  पेक्षां अधिक आहे, आणि याप्रमाणे पुढेहि.

१९६. जो अपूर्णांक एकापेक्षां कमी आहे त्याचे घात उत्तरोत्तर घटत जातात; जसें,  $\frac{३}{५}$  यांचा वर्ग, अथवा  $\frac{३}{५} \times \frac{३}{५}$  हे  $\frac{३}{५}$  पेक्षां कमी आहेत, कां कीं  $\frac{३}{५}$  चा वर्ग केवळ दोन पंचमांशाचे दोन पंचमांश आहे. ही घट अनंत होत जाईल; ह्मणजे असें अतिलहान परिमाण नाही, कीं त्याहून  $\frac{३}{५}$  यांचा एकादा घात कमी होणार नाही. कां कीं जर  $\frac{५}{२} = क$  तर  $\frac{३}{५} = \frac{१}{क}$ , आणि  $\frac{३}{५}$  यांचे घात  $\frac{१}{कक}$ ,  $\frac{१}{ककक}$ , इत्यादि असे आहेत. जापेक्षां १ हून क अधिक आहे, तर (१९५) प्रमाणे कांहीं सांगितल्या परिमाणापेक्षां अधिक असा एकादा कचा घात काढितां येईल. या घाताला म ह्मण; तर  $\frac{१}{क}$  हा  $\frac{३}{५}$  यांतील कचा घाताचे वर्णाचा घात आहे; आणि अपूर्णांकाचा छेद हवा तेवढा मोठा केल्याने, तो अपूर्णांक (११२) प्रमाणे हवातेवढा लहान होईल.

१९७. याखालचे श्रेणीपासून तीन गोष्टी निघतात,

१ र रर ररर रररर इत्यादि.

पहिल्यानें. जर १ पेक्षां र अधिक आहे, तर वरची श्रेणी वाढत्या पदांची होईल. दुसऱ्यानें. जर १ चे बरोबर र असेल, तर पदांचा किमती सारख्याच होतील. तिसऱ्यानें. जर १ पेक्षां र कमी असेल, तर श्रेणी घटत्या पदांची होईल. पहिल्या दोन पक्षांत

१ + र + रर + ररर + इत्यादि

यांतील, पदांची संख्या पुरतेपणी वाढविली असतां, त्यांचें सर्वघन हवें तेवढें मोठें करितां येईल हें स्पष्ट आहे. परंतु तिसऱ्या पक्षांत असें घडेल, किंवा घडणारहि नाहीं; कां कीं जरी प्रत्येक पायरीला कांहीं मिळविलें असतें, तथापि तें मिळविण्याचें परिमाण प्रत्येक पायरीस घटतें, यावरून तें परिमाण किती वेळा मिळविलें तरी उत्तर हवें तेवढें मोठें करितां येईल, असें खचित् ह्मणतां येत नाहीं. ही गोष्ट दाखवा-यासाठीं या पुढील श्रेणीचा विचार कर,

$१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \frac{१}{१६} +$  इत्यादि,

ही श्रेणी किती पुढें वाढविली, तरी तिचें सर्वघन २ चे बरोबर करायासाठीं, तिचे उजव्येकडील शेवटील पदाइतकें मिळविलें पाहिजे. जसें,

$$(१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४}) + \frac{१}{४} = १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२} = १ + १ = २.$$

$$(१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८}) + \frac{१}{८} = २.$$

$$(१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \frac{१}{१६}) + \frac{१}{१६} = २, \text{ इत्यादि.}$$

परंतु वरचे श्रेणीमध्ये प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाचे केवळ अर्धा-बरोबर आहे; यामुळे कितीहि पदे घेतलीं, तरी त्यांचे पुढील दुसरें एक पद त्यांशीं मिळविलें तरी २ याचे बरोबर कधींहि होणार नाहीं. यामुळे,  $१, \frac{१}{२}, \frac{१}{४}, \frac{१}{८},$  इत्यादि याचें सर्वघन निरंतर २ यांचे जवळजवळ होत जातें, ह्मणून प्रत्येक पायरीवर सर्वधनाचें आणि २ चें अंतर कमी होत जातें, परंतु त्याचे बरोबर कधींहि होत नाहीं. यावरून २ यास  $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} +$  इत्यादि, या श्रेणीची नियतता ह्मणतात. यावरून प्रत्येक उतरती श्रेणीला नियतता आहे, असा निश्चय करवत नाहीं. या गो-

छींचे उलटें या सरळ श्रेणीवरून दाखवितां येईल, ह्मणजे,  $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} +$  इत्यादि, ही या पुढीलप्रमाणे मांडितात.

$$१ + \frac{१}{२} + \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{४}\right) + \left(\frac{१}{५} + \dots + \frac{१}{८} \text{ पावेतों}\right) + \left(\frac{१}{९} + \dots + \frac{१}{१६} \text{ पावेतों}\right) + \left(\frac{१}{१७} + \dots + \frac{१}{३२} \text{ पावेतों}\right) + \text{इत्यादि.}$$

पहिल्या दोन पदांशिवाय अशे तऱ्हेनें सर्व श्रेणीचे निरनिराळे भाग केले आहेत, आणि प्रत्येक भागांत शेवटील पदाचा छेदांत जितके एक आहेत, त्यांचे निम्मे पदे प्रत्येक भागांत घेतात. जसे, चवथे भागांत १६ अथवा  $\frac{३२}{२}$  पदे घेतात. हा प्रत्येक भाग  $\frac{१}{२}$  पेक्षा अधिक आहे हें दाखवितां येईल. तें दाखविण्यास तिसरा भाग घे, ह्मणजे,  $\frac{१}{९}, \frac{१}{१०}, \frac{१}{११}, \frac{१}{१२}, \frac{१}{१३}, \frac{१}{१४}, \frac{१}{१५}$ , आणि  $\frac{१}{१६}$  असा आहे.  $\frac{१}{१६}$  या शेवटील पदा खेरीज सर्व दुसरीं पदे  $\frac{१}{१६}$  यापेक्षा अधिक आहेत; यामुळे या प्रत्येक पदाचे जागीं  $\frac{१}{१६}$  मांडिला असतां, या भागांतील सर्व पदांची बेरीज पूर्वीपेक्षा कमी होईल; आणि जापेक्षा असे केल्यानें त्यांची बेरीज  $\frac{१}{१६}$ , किंवा  $\frac{१}{२}$  होती, तर ते सर्व भाग पूर्वीचे  $\frac{१}{२}$  पेक्षा अधिक होतील. आतां,  $१ + \frac{१}{२}$  यास निरंतर  $\frac{१}{२}$  मिळविला, तर केव्हां तरी त्याचें सर्वधन कोणत्याहि सांणीतल्ये संख्येपेक्षा अधिक होईल. तर  $\frac{१}{२}$  याचे जागीं, वरचा वेगळाल्या भागांचीं पदे निरनिराळीं एकामागे एक मिळविलीं असतां, त्यांचें सर्वधन पूर्वीपेक्षा खचित अधिक असवें. परंतु  $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३}$ , इत्यादि अशे तऱ्हेनें वरची श्रेणी केली आहे, यावरून जी वरची गोष्ट सांणीतली ती सिद्ध होती, ह्मणजे या श्रेणीस कांहीं नियतता नाही.

१९८. जेव्हां १ पेक्षा र कमी आहे, तेव्हां  $१ + r + r^2 + r^3 + \dots$  इत्यादि, या श्रेणीस नेहमी नियतता आहे. हें सिद्ध करायासाठीं, मनांत आण, कीं जा पदावर थांबतों त्याचे पुढील पद अ आहे, तर (१९४) वरून तिचें सर्वधन  $\frac{१-a}{१-r}$  अथवा (११२) प्रमाणे  $\frac{१}{१-r} - \frac{a}{१-r}$  आहे. या श्रेणीचीं पदे (१९६) प्रमाणे अनंत घटत जातात, यावरून पहिल्या पदापासून दुसरें पुढलें पद इतकें लांब घेतां येईल, कीं अ, आणि यामुळे  $\frac{a}{१-r}$  हवा तेवढा लहान होईल. परंतु जरी स्पष्ट आहे, कीं  $\frac{१}{१-r}$  यापेक्षा  $\frac{१}{१-r} - \frac{a}{१-r}$  हे नेहमी कमी आहेत, तथापि  $\frac{१}{१-r}$  याचे हवे तेवढे जबळ करितां येतील; ह्मणजे  $१ + r + r^2 + \dots$  इत्यादि ही श्रेणी  $\frac{१}{१-r}$  या नियतते जबळ उत्तरोत्तर येईल. जसें  $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \dots$  इत्यादि या श्रेणींत  $r = \frac{१}{२}$ ,

तर ती श्रेणी निरंतर  $\frac{1}{1-2}$  अथवा २ यांचे जवळ होईल, असे मागील

कलमांत सांगितले.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

$$२ + \frac{२}{३} + \frac{२}{९} + \text{इत्यादि.}$$

अथवा  $२(१ + \frac{१}{३} + \frac{१}{९} + \text{इत्यादि})$  याची नियतता ३ आहे.

$$१ + \frac{१}{१०} + \frac{१}{१००} + \text{इत्यादि.} \dots\dots\dots १० \dots$$

$$५ + \frac{१५}{७} + \frac{४५}{४९} + \dots\dots\dots ८\frac{३}{४} \dots$$

१९९. जेव्हां  $\frac{अ}{ब}$  हा अपूर्णांक  $\frac{क}{ड}$  याचे बरोबर नाही, परंतु त्यापेक्षा अधिक आहे, तेव्हां क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण अधिक आहे असे द्खणतात; आणि जेव्हां  $\frac{अ}{ब}$  हा  $\frac{क}{ड}$  यापेक्षा कमी आहे, तेव्हां क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण कमी आहे. या व्याख्यानावर ही पुढील उदाहरणे अभ्यासासाठी सांगतो.

पहिले. जर बपेक्षां अ अधिक असेल, आणि डचाबरोबर किंवा कमी क असेल, तर क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण अधिक होईल.

दुसरे. बपेक्षां जर अ कमी असेल, आणि क हा डचाबरोबर किंवा त्यापेक्षा अधिक असेल, तर अ आणि ब यांचे प्रमाण, क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां कमी होईल.

तिसरे. क जसा डला तसा अ जर बला असेल, आणि जर क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण अधिक असले, तर क्षपेक्षां ड कमी होईल; आणि जर क आणि क्ष यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे प्रमाण कमी असेल, तर क्षपेक्षां ड अधिक होईल.

चवथे. अक्ष आणि वक्ष+य यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे अधिक प्रमाण आहे, आणि अक्ष आणि वक्ष-य यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचे कमी प्रमाण आहे.

२००. क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां जर अ आणि ब यांचे

अधिक प्रमाण असेल, तर  $अ+क$  आणि  $ब+ड$  यांचे प्रमाण  $अ$  आणि  $ब$  यांचे प्रमाणापेक्षा कमी होईल, परंतु  $क$  आणि  $ड$  यांचे प्रमाणापेक्षा अधिक होईल; अथवा  $\frac{अ}{ब}$  आणि  $\frac{क}{ड}$  या दोन अपूर्णाकांतून  $\frac{अ}{ब}$  अधिक असेल, तर  $\frac{अ+क}{ब+ड}$  हे  $\frac{क}{ड}$  यापेक्षा अधिक, परंतु  $\frac{अ}{ब}$  यापेक्षा कमी होईल. हे सिद्ध करायासाठी, लक्षांत ठेविले पाहिजे, की  $\frac{मक्ष+नय}{म+न}$  यांत  $क्ष$  आणि  $य$  बरोबर नसतील, तर तो अपूर्णाक  $क्ष$  आणि  $य$  यांचेमध्ये असावा; कां की  $क्ष$  आणि  $य$  या दोहोंतून  $क्ष$  कमी असेल, तर  $\frac{मक्ष+नक्ष}{म+न}$  किंवा  $क्ष$  पेक्षा तो अपूर्णाक खचित मोठा होईल; आणि जर त्या दोहोंतून  $य$  मोठा असेल, तर  $\frac{मय+नय}{म+न}$  किंवा  $य$  पेक्षा तो अपूर्णाक खचित कमी होईल. यामुळे  $क्ष$  आणि  $य$  यांचेमध्ये तो अपूर्णाक येतो. आतां  $\frac{अ}{ब} = क्ष$  आणि  $\frac{क}{ड} = य$  असे घे; तर  $अ=बक्ष$  आणि  $क=डय$ . आतां वर सिद्ध केल्याप्रमाणे  $\frac{बक्ष+डय}{ब+ड}$  हा अपूर्णाक  $क्ष$  आणि  $य$  यांचे मध्ये येतो; यामुळे  $\frac{अ+क}{ब+ड}$  हा अपूर्णाक  $\frac{अ}{ब}$  आणि  $\frac{क}{ड}$  यांचे मध्ये येतो. पुनः, जापेक्षां  $\frac{अ}{ब}$  आणि  $\frac{क}{ड}$  हे  $\frac{अप}{बप}$  आणि  $\frac{कक}{डक}$  यांचे अनुक्रमे बरोबर आहेत, आणि जापेक्षांवर सिद्ध केल्याप्रमाणे,  $\frac{अप+कक}{बप+डक}$  हा अपूर्णाक पहिल्या दोहोंचे मध्ये येतो, यामुळे तो दुसऱ्या दोहोंमध्येहि येतो; ह्मणजे,  $प$  आणि  $क$  हे कांहीं संख्या किंवा अपूर्णाक असतील, तरी  $\frac{अप+कक}{बप+डक}$  हा  $\frac{अ}{ब}$  आणि  $\frac{क}{ड}$  यांचा मध्ये येतो.

२०१. जा अवघड पद्धती आहेत, त्यांची किंमत अदमासाने समजायास मागील कलमावरून कांहीं कल्पना करितां येईल. जसे  $\frac{१+क्ष}{१+क्षक्ष}$  हा  $\frac{१}{१}$  आणि  $\frac{क्ष}{क्षक्ष}$  किंवा  $१$  आणि  $\frac{१}{क्ष}$  यांचे मध्ये येतो;  $\frac{अक्ष+बय}{अक्षक्ष+बयय}$  हा  $\frac{अक्ष}{अक्षक्ष}$  आणि  $\frac{बय}{बयय}$  अथवा  $\frac{१}{क्ष}$  आणि  $\frac{१}{बय}$  यांचे मध्ये येतो. वर दाखविले, की  $\frac{अ+ब}{२}$  हा अपूर्णाक  $अ$  आणि  $ब$  यांचा मध्ये येतो, येथे त्याचा छेद  $१+१$  अशांने होतो.

२०२.  $\frac{अ+ब+क+ड}{प+क्ष+र+स}$  हा अपूर्णाक  $\frac{अ}{प}$ ,  $\frac{ब}{क्ष}$ ,  $\frac{क}{र}$ , आणि  $\frac{ड}{स}$  यांचामध्ये आहे, ह्मणजे तो अपूर्णाक यांतून जे मोठे पद त्यापेक्षां कमी, आणि जे अति लहान पद त्यापेक्षां अधिक आहे, असे सिद्ध करितां येईल. हे अपूर्णाक त्यांचे महत्वानुसाराने मांड; ह्मणजे  $\frac{अ}{प}$  हा  $\frac{ब}{क्ष}$  पेक्षा अधिक असावा,  $\frac{ब}{क्ष}$  हा  $\frac{क}{र}$  पेक्षा अधिक असावा, आणि  $\frac{क}{र}$  हा  $\frac{ड}{स}$  पेक्षा अधिक असावा. तर (२००) प्रमाणे

$\frac{अ+ब}{प+क}$	हा	$\frac{अ}{प}$							
$\frac{अ+ब+क}{प+क+र}$		$\frac{अ+ब}{प+क}$	आणि	$\frac{अ}{प}$					
$\frac{अ+ब+क+उ}{प+क+र+स}$		$\frac{अ+ब+क}{प+क+र}$	आणि	$\frac{अ}{प}$					

यावरून वर सांगितलेली प्रतिज्ञा उघड आहे.

२०३. अ हा व पेशां मोठा, आणि अ हा वपेशां लहान, हें लिहिण्याची चाल फारकरून अ > व आणि अ < व अशी आहे; यांत मुख्यत्वेकरून कोनावें तोंड मोठे परिमाणाकडे असावें. शिकणारानें या चिन्हाशीं पक्कें माहित व्हावें.

नववा भाग.

संयोग आणि व्युत्क्रमसंयोग यांवरून.

२०४. निरनिराळ्या अक्षरांचा अनेक चकत्या पुढें ठेऊन, त्यांतून वारंवार चार चार काढायाचा असतील, तर त्या किती तऱ्हांनीं काढितां येतील, याविषयीं विचार करितों. त्यांतील प्रत्येक तऱ्हेला चोहों चोहोंचा संयोग ह्मणतात, परंतु त्यांतून चोहों चोहोंची निवड करणें असें ह्मणणें हें त्यापेक्षां योग्य आहे. दोन संयोग, किंवा दोन निवडी यांत कोणत्याहि तऱ्हेचा फेर असला, तर त्यांस भिन्न असें ह्मणतात; जसें अबकड आणि अबकइ हे भिन्न आहेत, कां कीं एकामध्यें ड आहे आणि दुसऱ्यामध्ये इ आहे, परंतु दोहोंमध्ये दुसरीं अक्षरे सारिः खींच आहेत. अ, ब, क, ड, इ, आणि फ, अशा साहा चकत्या आहेत, त्यांतून तिहीं तिहींचे संयोग वीस तऱ्हांनीं पुढील प्रमाणें होतील;

अवक	अकइ	वकड	वइफ
अवड	अकफ	वकइ	कडइ
अवइ	अडइ	वकफ	कडफ
अवफ	अडफ	वडइ	कइफ
अकड	अइफ	वडफ	डइफ

आणि त्या सहा चकत्यांतून चार चार अक्षरांचे संयोग पंधरा त-  
हानीं होतील, ह्मणजे याप्रमाणें;

अवकड	अवडइ	अकडइ	अडइफ	वकइफ
अवकइ	अवडफ	अकडफ	वकडइ	वडइफ
अवकफ	अवइफ	अकइफ	वकडफ	कडइफ

आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

२०५. वरचा प्रत्येक संयोग अनेक वेगळाल्ये क्रमांनीं मांडितां येईल;  
ह्मणजे, अवकड हा या पुढील कोणत्याहि क्रमानें मांडितां येईल;

अवकड	अकवड	अकडव	अवडक	अडवक	अडकव
वअकड	कअवड	कअडव	वअडक	डअवक	डअकव
वकअड	कवअड	कडअव	वडअक	डवअक	डकअव
वकडअ	कवडअ	कडवअ	वडकअ	डवकअ	डकवअ

यांतून कोणत्याहि दोन संयोगांत अक्षरांची रचना एकसारिखी ना-  
हीं. ह्मणून प्रत्येक संयोगास अवकड याचा व्युत्क्रमसंयोग ह्मणतात.  
तथापि संयोग रूपानें ते सर्व सारिखेच आहेत, कां कीं अ, व, क, आ-  
णि ड, हीं चार अक्षरे प्रत्येकांत आहेत.

२०६. अनेक चकत्या दिल्या असतां, जसें सहा, त्यांतून दोन दो-  
न, तीन तीन, इत्यादि, चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोग किती तहानीं होती-  
ल, याचा आतां शोध करितों. चार चकत्यांचे जे सगळे व्युत्क्रमसं-  
योग होतील, ते जर करितां आले, तर पांच चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोग  
या पुढीलप्रमाणें होतील. चार अक्षरांचा चार चकत्या घे, जसें

अबकफ यांत ड आणि इ नाहीत; तर त्या चार चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोगाचे शेवटी, ड आणि इ हीं अक्षरे मांडिलीं असतां, पुढील प्रमाणें होतें, अबकफड, अबकफइ, आणि प्रत्येक चार चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोगाशीं तसूच कृति कर; जसे, डअबक यापासून डअबकइ आणि डअबकफ असें होतें. चार चकत्यांचे सर्व व्युत्क्रमसंयोग समजल्यावर वरचे रितीप्रमाणें चाललें असतां, पांच चकत्यांचा कोणताहि व्युत्क्रमसंयोग, दृष्टि चुकून जाणार नाही; कां कीं पांच चकत्यांचा कोणताहि व्युत्क्रमसंयोग, जसे डबफइअ, कृति करत्ये समयीं डबफइ यापासून निघेल, ह्मणजे, वर सांगितल्ये रितीप्रमाणें तो डबफइअ असा होतो. रितीप्रमाणें कृति केली असतां, कोणताहि व्युत्क्रमसंयोग दोन वेळा एकसारखाच येणार नाही, कां कीं डबफइअ हा केवळ डबफइ यापासून होतो.

अ व क ड इ फ

या सहा चकत्यांतून, कोणत्याहि दोन चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोग काढायास वरचे रितीप्रमाणें चाललें, तर त्या प्रत्येकाचे पांच व्युत्क्रम संयोग होतील, जसे,

अ यापासून अब अक अड अइ अफ होतात.

व . . . . . अब वक वड वइ वफ इत्यादि होतात,  
आणि ह्या सर्व चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोग  $६ \times ५$  अथवा ३० होतात.  
पुनः अब यापासून अबक अबड अबइ अबफ होतात.

अक . . . . . अकव अकड अकइ अकफ इत्यादि होतात.  
आणि त्यांत दोन चकत्यांचे  $६ \times ५$  अथवा ३० व्युत्क्रम संयोग होतात, ते प्रत्येक ३ चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोग असे ४ होतात; यामुळे या शेवटीलांचे सर्व व्युत्क्रम संयोग  $६ \times ५ \times ४$  अथवा १२० इतके होतात.

पुनः अबक यापासून अबकड अबकइ अबकफ होतात.

अबड . . . . . अबडक अबडइ अबडफ इत्यादि होतात.  
आणि यांत तीन चकत्यांचे  $६ \times ५ \times ४$  अथवा १२० इतके व्युत्क्रम संयोग होतात, त्या प्रत्येकांत चार चकत्यांचे ३ व्युत्क्रम संयोग होतात; यामुळे या शेवटीलांचे सर्व व्युत्क्रम संयोग  $६ \times ५ \times ४ \times ३$ , अथवा ३६० इतके होतात. तसेच तऱ्हेने, ५ चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोग  $६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २$  होतात, आणि सहा चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोग किंवा, जित-



क्या वेगवेगळ्या तऱ्हांनीं सहा चकत्यांची रचना करितां येईल, ते  $६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १$  हे आहेत. हीं शेवटील दोन उत्तरे सारखींच हें खरें आहे; कां कीं पांच चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांत केवळ एक चकती सोडिली जाती, तर सोडलेले चकतीपासून, सहा चकत्यांचा केवळ एक व्युत्क्रम संयोग होतो. सहा चकत्यांचे जागीं कोणतीहि दुसरी संख्या घेतली, जसे क्ष, तर त्यांतून दोन चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या क्ष(क्ष-१), तीन चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या क्ष(क्ष-१)(क्ष-२), चार चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या क्ष(क्ष-१)(क्ष-२)(क्ष-३), अशा होतील; यावरून रीति हीच आहे; चकत्यांची सर्व संख्या त्यांचे जवळचे खालचे संख्येनें गुण, नंतर तो गुणाकार त्याचे दुसरे खालचे अंकानें गुण, आणि प्रत्येक व्युत्क्रम संयोगांत जितक्या चकत्या असावयाचा तितक्या वेळा चकत्यांचा संख्या, पहिल्यापासून गुणाकार होईतोपर्यंत पुढें करित चाल; जो गुणाकार येईल तो इच्छित्या व्युत्क्रम संयोगांची संख्या होईल. जसे, १२ चकत्यांतून चार चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोग  $१२ \times ११ \times १० \times ९$  अथवा  $११८८०$  एवढे होतील.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

२०७. ८ बैठकींवर ८ पुरुषांची किती वेगवेगळ्या तऱ्हांनी रचना करितां येईल? उत्तर ४०३२०.

आठ पुरुषांस वर्तुळाकृती बसवायाचें आहे, असें कीं त्यांतून कोणत्याहि दोन रचनेंत, प्रत्येक पुरुषाचें स्थान सारखें होणार नाहीं, अशे तऱ्हेनें त्या पुरुषांचा किती रचना करितां येतील? उत्तर ५०४०.

पंधरा पुरुषांचा जितक्या वेगवेगळ्या रचना करितां येतील, त्यांतील प्रत्येक रचनेस, जर १ पैचा शंभरावा अंश दिला तर सर्व मिळून काय दावें लागेल?

उत्तर ६८१०८०४० रुपये.

सत्रा व्यंजनें आणि पांच स्वर असले, तर, एक शब्दांत दोन व्यंजनें आणि एक स्वर, असे त्यांपासून किती शब्द होतील?

उत्तर ४०८०.

२०८. मागील सांगितले रितीवरून, जी वेगवेगळ्या व्युत्क्रम संयोगांची संख्या येती, त्यापेक्षां जेव्हां दोन किंवा अधिक चकत्यांवर सारिखींच अक्षरें असतात, तेव्हां व्युत्क्रम संयोगांची संख्या कमी येती. अ, अ, अ, ब, क, ड, अशा सहा चकत्या आहेत, तर अ मध्ये भेद दाखविण्या करितां त्यांस अ, अ, अ, याप्रमाणें क्षणभर मांड, तर रिती प्रमाणें अबकअअड, आणि अबकअअड, हे वेगवेगळे व्युत्क्रम संयोग आहेत, परंतु स्वर चिन्हे नसलीं, तर ते तसे नाहींत, याजकरितां अशे अक्षरांचे वेगवेगळे व्युत्क्रम संयोग काढायासाठीं ब, क, आणि ड, हे घेऊन, एक व्युत्क्रम संयोग कर, आणि अचीं वेगवेगळीं स्थळें पुढील प्रमाणें रिकामी ठेव; जसें, ( ) बक ( ) ( ) ड. जर, अ, अ, अ, इत्यादि तऱ्हेनें अच्चा भेद ठेविला असेल, तर वरचा कुंडलींतलीं रिकामीं स्थळें भरल्यानें,  $३ \times २ \times १$  इतके वेगवेगळे व्युत्क्रम संयोग होतील, आणि जर अमध्ये कांहीं भेद दाखविला नाहीं, तर ते सहा व्युत्क्रम संयोग एक सारिखेच होतील. यावरून अबअबकड यापासून अ, अ, अ, ब, क, ड, यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या काढायासाठीं, पहिल्याचे व्युत्क्रम संयोग  $३ \times २ \times १$  अथवा ६ यांणीं भागिले पाहिजेत, त्यापासून  $\frac{६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{३ \times २ \times १}$  अथवा १२० होतात. त्याच प्रमाणें अबअबबबकक, यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या  $\frac{१ \times ८ \times ७ \times ६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{४ \times ३ \times २ \times १ \times ३ \times २ \times १ \times २ \times १}$  इतकी आहे.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

अ, न, ट, ए, ट, र, ए, न, ऐ, ट, अ, र, ए, अ, न, हीं अक्षरें किती वेगवेगळ्या तऱ्हांनीं रचितां येतील ?

उत्तर, १२६१२६०००.

२०९. व्युत्क्रम संयोगांपासून संयोग सहज काढितां येतात, परंतु, हे संयोग निरनिराळे करायासाठीं, (२०६) कलमांत जी रीति सांगितली, त्याप्रमाणें एथें रीति दाखवितों. अ, ब, क, ड, इ, यांतून दोन-दोन अक्षरांचे संयोग करायास समजले, तर त्या दोहों दोहोंचे संयोगांचे शेवटीं, त्यांचे उजवे कडचीं अक्षरें एकामागें एक मांडून, तीन तीन अक्षरांचे संयोग काढितां येतील. जसें, अब यापासून अबक, अबड,

अबइ, होतात; अड यापासून केवळ अडइ होतो. दोन अक्षरांचे संयोग समजल्यावर अशा रितीने चालले असतां, कोणताहि तीन अक्षरांचा संयोग दृष्टि चुकून जाणार नाही; कां कीं अकड, याप्रमाणें तिहींचा कोणताहि संयोग, कृति करिलेसमयीं अक पासून निघेल, ह्मणजे वरचे रिती प्रमाणें यापासून अकड होतो. कोणताहि संयोग दोन वेळा येणार नाही, कां कीं रिती प्रमाणें चालले असतां, अकड हा केवळ अक पासून निघेल, तो अड आणि कड यांपासून कधींहि निघणार नाही. या तऱ्हेनें खालचे पांच अक्षरांचे संयोग काढले असतां या प्रमाणें होतील,

अ व क ड इ

अ पासून अब अक अड अइ होतात.

व . . . . . वक वड वइ . . . . .

क . . . . . कड कइ . . . . .

ड . . . . . डइ . . . . .

आणि अव पासून अवक अवड अवइ

अक . . . . . अकड अकइ

अड . . . . . अडइ

वक . . . . . वकड वकइ

वड . . . . . वडइ

कड . . . . . कडइ

अब वइ कइ आणि डइ यांपासून कांहीं होत नाहीं.

आणि अबक पासून अबकड अबकइ होतात.

अबड . . . . . अबडइ

अकड . . . . . अकडइ

वकड . . . . . वकडइ

वर प्रमाणें अबइ, अकइ, अडइ, वकइ, वडइ, कडइ, यांपासून कांहीं होत नाहीं. अबकड यापासून अबकडइ होतो, दुसऱ्यांपासून कांहीं होत नाहीं हे स्पष्ट आहे, कां कीं पांच वस्तूंपासून पांचांची एकच निवड होती.

२१०. संयोगांची संख्या काढण्याची रीति, व्युत्क्रम संयोगांचे संख्या काढण्याचे रीती वरून सरळ निघती. ७ चकत्या घे; तर, जापेक्षां दोहों दोहोंचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या  $७ \times ६$  इतकी आहे, आणि जापेक्षां बघ आणि अब असे दोन व्युत्क्रम संयोग, अब अशा संयोगांतून निघतात, तर संयोगांची संख्या व्युत्क्रम संयोगांचे संख्येचे अर्धाबरोबर आहे, ह्मणजे  $\frac{७ \times ६}{२}$ . जापेक्षां तिहिं तिहींचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या  $७ \times ६ \times ५$  असी आहे, आणि जापेक्षां अबक अशा प्रत्येक संयोगाचे  $३ \times २ \times १$  व्युत्क्रम संयोग होतात, तर तिहिंतिहींचा संयोगांची संख्या  $\frac{७ \times ६ \times ५}{१ \times २ \times ३}$  आहे. आणि जापेक्षां अबकड अशे चोहोंचोहोंचे संयोगापासून  $४ \times ३ \times २ \times १$  इतके व्युत्क्रम संयोग होतात, तर चोहोंचोहोंचे संयोगांची संख्या  $\frac{७ \times ६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३ \times ४}$  आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून रीति याप्रमाणें आहे. न चकत्यांचे संयोगांची संख्या काढायासाठी, त्या न चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांचे संख्येस  $१ \times २ \times ३$ , इत्यादि न पावेतो अंकांचे गुणाकारानें भाग. जर सर्व चकत्यांची संख्या दाखवायास क्ष घेतला, तर त्यांतून दोहोंदोहोंचे संयोगांची संख्या  $\frac{क्ष(क्ष-१)}{१ \times २}$  आहे; तीन अक्षरांचे संयोगांची संख्या  $\frac{क्ष(क्ष-१)(क्ष-२)}{१ \times २ \times ३}$  आहे; चोहोंचे संयोगांची संख्या  $\frac{क्ष(क्ष-१)(क्ष-२)(क्ष-३)}{१ \times २ \times ३ \times ४}$  आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

२११. कांहीं पक्षांत या रीतीस पुढील प्रमाणें सरळ रूप देतां येईल. दहा चकत्यांतून जितक्ये वेळा सात चकत्यांची निवड होती, तितक्या वेळा तीन तीन चकत्यांचे संयोग बाकी रहातात. यावरून जितके सातांचे संयोग होतील, तितकेच तिहींचे संयोग होतात. ह्मणून सातांचे संयोग काढण्याबद्दल तिहींचे संयोग काढल्यानें कार्य होईल; यावरून, या दोन संयोगांचा संख्या काढण्याचा सारिणी, जरी रूपानें भिन्न आहेत, तरी त्यांचें उत्तर सारिखेंच येतें असें निश्चयें ह्मणतां येईल. आणि तसेंच सिद्ध होतें; कां कीं दाहांतून सातांचे संयोगांची संख्या  $\frac{१० \times ९ \times ८ \times ७ \times ६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६ \times ७}$  आहे, यांत अंश आणि छेद या दोहीं स्थळीं  $७ \times ६ \times ५ \times ४$  हा गुणाकार येतो, ह्मणून  $(१०८)$  प्रमाणें तो दोहोंतून छेकून टाकला, तर  $\frac{१० \times ९ \times ८}{१ \times २ \times ३}$  असें राहातें, ह्मणून दहांतून तिहींचे संयोगांची संख्या ही आहे. याप्रमाणें दुसऱ्या कोणत्याहि पक्षांत दाखवितां, येईल.

## अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

द्वारा वस्तूतून चोहोचोहोचे संयोग किती होतील ?

उत्तर. ४९५.

$$\left. \begin{array}{l} ८ \\ ११ \\ २८ \\ १५ \end{array} \right\} \text{यांतून} \left\{ \begin{array}{l} ६ \\ ४ \\ २६ \\ ६ \end{array} \right\} \text{यांचे संयोग किती होतील ?}$$

$$\text{उत्तर.} \left\{ \begin{array}{l} २८ \\ ३३० \\ ३७८ \\ ५००५ \end{array} \right.$$

५२ वस्तूतून तेरातेरांचे संयोग किती करितां येतील ?

उत्तर. ६३५०१३५५९६००.

## दुसरें पुस्तक.

व्यवहारी गणित.

## पहिला भाग.

वजनं, मापं, इत्यादि.

२१२. पहिल्या पुस्तकांत जा कृती दाखविल्या आहेत, त्यांशिवाय व्यवहारी कामाकरितां, दुसऱ्या कृतींचें प्रयोजन लागत नाहीं. आतां आपल्ये गणनेचा खरेपणाची खात्री व्हावी इतकेंच केवळ नाहीं, परंतु त्या गणनेचीं उत्तरें ताडून, त्यांजविषयीं कांहीं निश्चय करणें, ही एक गोष्ट राहिली आहे. यापूर्वी (१५) प्रमाणें एक जातीचा एक मात्र कामांत आणिला, आणि जीं परिमाणें अनेक एकमानीं झालेलीं आहेत तीं, दुसऱ्या, तिसऱ्या, आणि चवथ्या, भागांत आहेत, आणि जीं

परिमाणें एकंचे अनेक अशांनीं झालेलीं आहेत, तीं पांचवा, आणि सहावा, या भागांत सांगितलीं आहेत. जसें, लांबीविषयीं बोलते समयी, एक दाखवायासाठीं एक मैल घेतल्यानें, अनेक मैलांची, किंवा एक मैलाचे अनेक भागांची लांबी, पूर्ण किंवा अपूर्णाकानें दाखवितां येईल;\* आणि त्यांत १ हा एक मैल आहे असें मानिलें पाहिजे. परंतु पुष्कळ पक्षांत या गोष्टीपासून अडचणीं येतील असें दिसेल. मनांत आण कीं एका खोलीची लांबी मैलाचा  $\frac{1}{१८०}$  आहे, आणि दुसऱ्ये खोलीची लांबी मैलाचा  $\frac{1}{१७४}$  आहे, असें झटलें तर दुसरी खोली, पहिली पेक्षा किती लांब आहे, याचा समज कसा होईल ! हें समजण्यासाठीं मैलापेक्षां काहीं लहान माप असवें; आणि जर एक मैलास १७६० समभागांत विभागून, त्या प्रत्येक भागास एक यार्ड असें नांव दिलें, तर पहिल्ये खोलीची लांबी ९ यार्ड आणि एक यार्डाचे  $\frac{९}{१८०}$  आहे, आणि दुसऱ्ये खोलीची लांबी १० यार्ड आणि एक यार्डाचे  $\frac{१०}{१७४}$  आहे असें दिसेल. यावरून या वेगवेगळ्या लांब्यांचा पूर्वीपेक्षां चांगला समज होतो, परंतु त्यांत  $\frac{९}{१८०}$  आणि  $\frac{१०}{१७४}$  हे अपूर्णांक आहेत ह्मणून, पुरतेपणीं चांगला समज होत नाहीं. तो पुरता समज करून घेण्याकरितां एका यार्डाचे तीन समभाग केले आहेत असें मनांत आण, आणि यांतून

\* एक दाखविण्यासाठीं कोणतेहि परिमाण घेतलें, तर त्याच जातीचें दुसरें काहीं परिमाण अनेक एकंमानी, अथवा एक एकंमाचे अनेक भागांनीं, बरोबरच दाखवितां येतें, ही गोष्ट खरी नाहीं. हा विषय शिकते समयी जें शिकणाराचें ज्ञान असेल, त्याहून वर सांगितलेलो गोष्ट सिद्ध करून समजून घेण्यासाठीं, त्याचा आगीं अधिक समज आला पाहिजे; परंतु याविषयीं जी काय त्याची समजूत असेल, ती खोटी आहे हें आतां दाखवितों. एक फूट लांबीची एक रेष घे, तिचे दहा समभाग कर, त्यांतून प्रत्येक भागाचे पुनः दहा समभाग कर, आणि याप्रमाणें पुनः पुनः करीत जा. जर असें त्या रेषेचें दशांश भागें अनंतपर्यंत चालविलें आणि त्या रेषेंत अदमासानें एक अ बिंदू घेतला, तर तो बिंदू त्यातील कोणतेहि दशांश भाग स्थळींच येईल असा निश्चय करवत नाहीं; आणि जरी त्या रेषेचे सात किंवा अकरा किंवा दुसरे काहीं समभागांत भाग केले, तरी तो अ बिंदू बरोबर भाग स्थळींच येईल असेंहि घडणार नाहीं. यावरून एक फुटाचा कोणत्याहि अपूर्णांकानें दाखवितां येणार नाहीं, असा काहीं फुटाचा भाग असेल; आणि हा गोष्ट गणितांतला मोठे विषय नैहमी घडतो असें दिसून येईल. जा शब्दावर ही टीप सांगितली त्या शब्दापासून असें समजावें, कीं एके फुटाचा काहीं भाग, गणितरूप अपूर्णांकानें हवा तितका जवळ जवळ दाखवितां येईल, आणि व्यवहारांत याहून अधिक सूक्ष्मपणाची गरज लागत नाहीं.

प्रत्येक भागास एक फूट असे नाव दे; तर एका यार्डाचे  $\frac{1}{4}$  यांत  $2\frac{1}{2}$  फुटी आहेत, आणि एक यार्डाचे  $\frac{1}{2}$  यांत एक फुटीचे  $3\frac{1}{2}$ , अथवा एक फुटीचे  $\frac{1}{3}$  पेक्षां काहीं अधिक आहे. यामुळे पहिल्या खोलीची लांबी ९ यार्ड, २ फुटी, आणि एक फुटीचा  $\frac{1}{3}$  आहे; आणि दुसऱ्या खोलीची लांबी १० यार्ड आणि एक फुटीचे  $\frac{1}{3}$  पेक्षां काहीं अधिक आहे. यावरून मोठ्या परिमाणासाठीं मोठी मापें, आणि लहान परिमाणासाठीं लहान मापें, असल्यानें सुलभ पडतें असें दिसतें; परंतु केवळ सोईसाठीं मात्र असें असोंवें, कां कीं एका पेक्षां अधिक मापें असल्यानें कोणत्याहि जातीचा परिमाणार्शीं गणना करितां येती, त्याचप्रमाणें केवळ एक माप असल्यानेंहि करितां येईल; परंतु नुसती गणना एक मापानें होती, इतकेंच केवळ नाहीं, परंतु गणना करण्यास एका मापानें फार सोपें पडतें.

अंक गणित आणि पदार्थ विज्ञान यांत चांगले प्रविण, अशा पुरुषांनीं एकाच काळीं जा मापांचे ठराव केले असते, त्यांसारखीं मापें हालीं या देशांत नाहींत. आतां पदार्थ विज्ञानाचे परिणाम, मापांचे ठराव करण्यासाठीं कोणत्या रितीनें उपयोगांत आणले आहेत हें दाखवितों. ज्योतिषापासून सांपडलेलें परिमाण कदाचित् हारवेलें, तर तें परिमाण काढण्याविषयींचा रितींत जा गोष्टी पुढें सांगितल्या आहेत, त्यांचे माहितीवरून त्या रिती खऱ्या आहेत किंवा नाहींत, याविषयीं मतभेद आहे; परंतु व्यवहार कामासाठीं त्या रिती पुरतेपणीं खऱ्या आहेत, याविषयीं काहीं संशय नाहीं.

वजनें आणि मापें हीं नेहमीं एक सारिखींच असावीं, आणि त्यांतून एकादें मुळारंभींचें माप कदाचित् सांडलें असतां, त्याचा पुनः कसा ठराव करावा, याची सर्वांस अपेक्षा असती हें उघड आहे. एक यार्डाचे खरें माप हालीं इंग्रजी सरकारासंत ठेविलें असतें; परंतु जर काहीं अपायानें त्याचा नाश झाला, तर यापुढें पांचशें वर्षांनंतरचा मनुष्यांस त्याचे वडील जास यार्ड असें ह्मणत होते, त्याची लांबी कशी कळेल? हें कळायसाठीं जें काहीं मनुष्याचा मतलबानें, किंवा अपायानें बदलवणार नाहीं, त्यापासून असें माप घेतलें पाहिजे. सूर्य मंडळांमध्ये काहीं अकस्मात् आश्चर्यकारक फेरफार झाला नाहीं, तर ज्योतिषांत दाखविल्याप्रमाणें पृथ्वीचा एक दिवसाचा फिरण्याचा काळ,

आणि एक वर्षाचे लांबीचा काळ, हीं दोन्ही एकसारखीच शेंकडों वर्षांपावेतो राहातील, ह्मणून या दोन काळांपासून मापाचे परिमाण सांपडते. जोंपर्यंत ज्योतिष शास्त्राचा अभ्यास चालत आहे, तोंपर्यंत या दोन काळांतून कोणता एक काळ सांडेल, असी कल्पना करण्यास अशक्य आहे, आणि एक दिवसाचे दुपारपासून, दुसऱ्या दिवसाचे दुपारपर्यंत जो काळ जातो तो, ह्मणजे सूर्याचा एक मध्यान्हापासून दुसऱ्या मध्यान्हपर्यंत जो काळ जातो, त्या काळाचे  $३६५\frac{१}{४}$  अथवा  $३६५.२४२२४$  इतके मध्यान्ह दिवस एक वर्षाची लांबी असे माहित आहे. हालीं वर्षाची लांबी  $३६५$  दिवस धरितात, आणि दिवसाचा एक चतुर्थांश वर राहातो, त्याबद्दल प्रति चवथ्या वर्षी एक दिवस अधिक वाढवितात, त्या वर्षास अधिक दिवसाचे वर्ष ह्मणतात. हे आणि प्रतिवर्षी  $\frac{१}{४}$  दिवस वाढविणे हीं सारखींच आहेत, आणि हे वाढविणेहि कांहीं अधिक आहे, कां कीं वर्षाची लांबी  $३६५$  दिवसांवर  $.२५$  इतकी नाही, परंतु दिवसाचे  $.२४२२४$  इतकी आहे. यावरून दिवसाचे  $.००७७६$  इतके अंतर पडते, ह्मणून इतक्याने आपले वर्ष अधिक आहे. हे अंतर  $१२८$  वर्षांत एक दिवसाबरोबर होतें, अथवा  $४००$  वर्षांत तीन दिवसांबरोबर होतें. यावरून वर्षाचे शतकाचे शेवटील वर्ष एक अधिक दिवसाचे असतें, अशीं तीन वर्षे एकाधिक दिवसाचीं न केलीं, आणि चवथें वर्ष एकाधिक दिवसाचे केलें, तर वर सांगितलेली कसर बरोबर होती. असें सन्  $१६००$  व्या वर्षास एकाधिक दिवस वर्ष झटले तर  $१७००$  वे,  $१८००$  वे,  $१९००$  वे, हीं वर्षे एक अधिक दिवसाचीं नाहींत, परंतु सन्  $२०००$  वे, वर्ष एक अधिक दिवसाचे होईल.

२१३. यावरून पहिले सांपडलेले माप एक दिवस आहे, आणि त्यास  $२४$  भागांत किंवा अवरांत विभागिलें आहे, प्रत्येक अवरास  $६०$  भागांत किंवा मिनिटांत विभागिलें आहे, आणि प्रत्येक मिनिटास  $६०$  भागांत किंवा सेकंदांत विभागिलें आहे. यावरून एक सेकंद, एक दिवसाचा  $८६४००$  वा भाग आहे, आणि काळाचे मान या पुढीलप्रमाणे आहे.



## इंग्रजी काळमान.

६० सेकंद	१ मिनिट.	१ मि०
६० मिनिटें.	१ अवर.	१ अ०
२४ अवर	१ दिवस.	१ दि०
७ दिवस	१ आठवडा	१ आ०
३६५ दिवस	१ वर्ष	१ व०
एक सेकंदास १से० असें मांडितात.		

या देशांत एक दिवसास ६० भागांत भागून, त्यांतील एक भागास घटिका ह्मणतात, आणि एक घटिकेचे ६० भाग कल्पून त्यांतील प्रत्येक भागास पळ ह्मणतात; यावरून एक दिवसांत ३६०० पळें आहेत, आणि हें काळमान याप्रमाणें आहे;—

## या देशांतील काळमान.

६० पळें	१ घटिका.	१ घ०
२ घटिका	१ मुहूर्त.	१ मु०
३ $\frac{३}{४}$ मुहूर्त	१ प्रहर	१ प्र०
८ प्रहर	१ अहोरात्र दिवस	१ दि०
१५ दिवस	१ पक्ष	१ प०
२ पक्ष	१ मास	१ मा०
२ मास	१ ऋतु	१ ऋ०
३ ऋतु	१ अयन	१ अ०
२ अयनें	१ वर्ष	१ व०

२१४. अशे तऱ्हेनें सेकंदाचें माप सांपडल्यावर, घड्याळाचा आंदोलक असा करितां येईल, कीं तो चालू केला असतां लंडन् शहराचे अक्षांशांत बरोबर एक सेकंदांत एक झोंका खाईल. नवें माप करायाचें जर असलें, तर अशा आंदोलकाचा लांबीस एक यार्ड ह्मटल्यानें, आणि लांबीचे सर्व दुसऱ्ये मोजण्याविषयीं यास मूळ माप असें ठरविल्यानें सोईस पडेल. परंतु हालीं एक यार्डाचें माप स्थापिलें गेलें आहे; आणि त्याचा योगानें वर सांगितलेल्या आंदोलकाची लांबी सांगतां

येईल. या आंदोलकाची लांबी काढण्याविषयीचे चौकशीपासून असे कळले आहे, की लंडनांत आंदोलकाची लांबी ३९१३९३ इंच आहे, अथवा सुमाराने एक यार्ड, तीन इंच, आणि एक इंचाचे  $\frac{५}{३६}$  श आहे. यार्डाचे विभाग या पुढीलप्रमाणे आहेत.

### इंग्रजी लांबीचीं मानें.

सर्वाहून लहान माप जव आहे.

३ जव ह्मणजे	१ इंच	१ इंच	१ इंच
१२ इंच	१ फूट	१ फूट	१ फूट
३ फुटी	१ यार्ड	१ यार्ड	१ यार्ड
$\frac{५१}{२}$ यार्ड	१ पोल	१ पोल	१ पोल
४० पोल अथवा २२० यार्ड	१ फर्लिंग	१ फर्लिंग	१ फर्लिंग
८ फर्लिंग अथवा १७६० यार्ड	१ मैल	१ मैल	१ मैल
आणि ६ फुटी	१ फादम	१ फादम	१ फादम
$६९\frac{१}{३}$ मै	१ अंश	१ अंश	१ अंश अथवा १०
भूगोलविद्येतील मैल	एक अंशाचा $\frac{१}{६०}$ वा भाग	आहे, आणि तसे तीन मैल ह्मणजे	नावाड्याचा एक लीग.

### या देशांतील भूमी लांब मोजणीचे कोष्टक.

८ यव ह्मणजे	१ अंगुळ	१ अंगुळ	१ अंगुळ
२४ अंगुळें	१ हात	१ हात	१ हात
४ हात	१ दंड	१ दंड	१ दंड
२००० दंड	१ क्रोश.कोस	१ क्रोश.कोस	१ क्रोश.कोस
२ कोस	१ गव्युति	१ गव्युति	१ गव्युति
२ गव्युति	१ योजन	१ योजन	१ योजन

### या देशांतील वस्त्रे व काष्ठ मोजणीचे कोष्टक.

२ अंगुळें ह्मणजे	१ तसु	१ तसु	१ तसु
१२ तसु	१ हात	१ हात	१ हात
२ हात	१ गज	१ गज	१ गज

## कापड मोजायाचीं इंग्रेजी मानें.

२ $\frac{१}{४}$ इंच	हणजे	१ नेल . . . . .	१ ने०
४ नेल . . . . .	१ पावयार्ड . . . . .	१ पा०	
३ पाव . . . . .	१ फ्लेमिश एल . . . . .	१ फ्ले० ए०	
५ पाव . . . . .	१ इंग्लिश एल . . . . .	१ इ० ए०	
६ पाव . . . . .	१ फ्रेंच एल . . . . .	१ फ्रें० ए०	

## २१५. क्षेत्राचीं इंग्रेजी मानें.

सगळीं क्षेत्रें चौरस इंच, चौरस फूटी, इत्यादींनीं मापिलीं जातात; चौरस इंच हणजे जा चौरसाची प्रत्येक बाजू १ इंच लांबीची आहे तें, आणि याप्रमाणें पुढेहि. हीं पुढील मानें लांबीचे मानांपासून निघतात, असें दिसण्यांत येईल.

१४४ चौरस इंच	हणजे	१ चौरस फूट . . . . .	१ चौ० फु०
९ चौरस फूटी . . . . .	१ चौरस यार्ड . . . . .	१ चौ० या०	
३० $\frac{१}{४}$ चौरस यार्ड . . . . .	१ चौरस पोल . . . . .	१ चौ० पो०	
४० चौरस पोल . . . . .	१ रूड . . . . .	१ रू०	
४ रूड . . . . .	१ एकर . . . . .	१ ए०	

एक एकरांत ४८४० चौरस यार्ड आहेत, जा चौरसाची बाजू २२ यार्ड आहे त्याचे दहा पट एक एकर आहे. जी सांकळी सर्वेयर लोक कामांत आणितात ती २२ यार्डांचे लांबीची असती, तिला १०० कड्या असतात, आणि ती प्रत्येक कडी यार्डाचे २२ किंवा ७९२ इंच लांबीची असती. एक एकर हणजे १० चौरस सांकळ्यांचे बरोबर आहे. एथें लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं जा चौरसाची बाजू ६९ $\frac{५}{८}$  यार्ड आहे, तो १ एकराचे जवळ जवळ आहे, परंतु तो एक चौरस फूटीचा  $\frac{१}{८}$  इतक्यानें एक एकराहून अधिक आहे.

## या देशातील चौरस मोजणीचे कोष्टक.

८	यव हणजे	१ अंगुळ . . .	१ अं०
४	अंगुळें . . . . .	१ मुष्टि . . .	१ मु०
३	मुष्टि . . . . .	१ वीत . . .	१ वी०
२	विती . . . . .	१ हात . . .	१ हा०
५ $\frac{५}{८}$	हात . . . . .	१ काठी . . .	१ का०
२०	काठ्या . . . . .	१ पांड . . .	१ पां०
२०	पांड . . . . .	१ बिघा . . .	१ बि०
१२०	बिघे . . . . .	१ चाहूर . . .	१ चा०

## पैमाषीचे चालीप्रमाणे.

१६	आणे हणजे	१ गुंठा . . .	१ गुं०
४०	गुठे . . . . .	१ एकर . . .	१ ए०

यांत एक आणा हणजे  $७\frac{१}{२}$  चौरस यार्डांजवळ आहे.

या देशांत हाताचा लांबीचा सर्वत्र सारखेपणा नाही, यामुळे काठीचा मापांतहि फेरफार आहे. त्यांतून मुंबईचा आसपास जी काठी चालू आहे, तिची लांबी ९'४ फुटी आहे. आणि यावरून एका बिघ्यांत  $३९२६\frac{२}{३}$  चौरस यार्ड आहेत, आणि एक एकरांत ४८४० चौरस यार्ड आहेत, यावरून त्यांचें प्रमाण जवळ जवळ ८५ स १०० असें आहे.

## २१६. भरींवाचीं किंवा \*पोकळीचीं मानें.

घन हणजे फांशाचे रूपाचें भरींव आहे. घन इंच हणजे, असा घन आहे, कीं जाची प्रत्येक बाजू एक एक इंच आहे, आणि याप्रमाणें पुढेहि,

\*पोकळी या शब्दाचा अर्थ तोच शब्द कामांत घेतल्यानें समजेल. जेव्हा एक मापांत दुसऱ्या मापापेक्षा अधिक रहातें, तें माप दुसऱ्या मापापेक्षा मोठे पोकळीचें आहे असें झणतात.

१७२८ घनइंच ह्मणजे १ घनफूट . . . १ घ० फू०

२७ घनफुटी . . . . . १ घनयार्ड . . . १ घ० या०

हें माप फार करून व्यवहारकामांत येत नाहीं, तथापि तें बहुत-करून मोठ्ये गणिताचे प्रश्नांत मात्र येतें. पूर्वी वेगवेगळाल्या जिनसां-करितां इंग्लंडांत वेगवेगळीं मापें कामांत घेत होते, परंतु हालीं तीं सोडून एकच कामांत घेतात. त्यास इंपीरियल किंवा बादशाही मान ह्मणतात, आणि तें पुढीलप्रमाणें आहे.

प्रवाही पदार्थांचीं आणि सर्व कोरड्ये जिनसांचीं इंग्रजी मानें.

४ जिल	ह्मणजे	१ पैट . . .	१ पै०
२ पैट - - -		१ कार्ट . . .	१ का०
४ कार्ट - - -		१ ग्यालन . .	१ ग्या०
२ ग्यालन - - -		१ पेक* . . .	१ पे०
४ पेक - - -		१ बुशल . . .	१ बु०
८ बुशल - - -		१ कार्टर . . .	१ का०
५ कार्टर - - -		१ लोड . . .	१ लो०

या मानामध्यें ग्यालन सुमारानें २७७.२७४ घनइंच आहे; ह्मणजे, २७७ $\frac{1}{4}$  घनइंच यांचे फार जवळ जवळ आहे.

या देशांत व्यापारांतील साखर, तेल, तूप, इत्यादि तोलायाचे वजनाचे कोष्टक.

पुणें चालीचा.

८ गुंजा	ह्मणजे	१ मासा . . .	१ मा०
१२ मासे . . . . .		१ टांक . . . . .	१ टा०
७२ टांक . . . . .		१ पक्का शेर . . .	१ प० शे०
४० शेर . . . . .		१ मण . . . . .	१ म०
२ $\frac{1}{2}$ मण . . . . .		१ पला . . . . .	१ प०
८ पले किंवा २० मण		१ खंडी . . . . .	१ खं०

\* पेक आणि त्याचे पुढील सर्व मापें केवळ कोरडा जिनस मापायाचे कामांत घेतात;

## मुंबई चालीचा.

८ गुंजा	हणजे	१ मासा	१ मा०
१२ मासे		१ तोळा	१ तो०
२८ तोळे		१ शेर	१ शे०
४० शेर		१ मण	१ म०
२० मण		१ खंडी	१ खं०

दक्षिण महाराष्ट्र देशी तेल, तूप, भाजी, इत्यादि तोलाचे कोष्टक.

२४ तोळे	हणजे	१ कच्चा शेर	१ क० शे०
५ कच्चे शेर		१ पांसरी	१ पां०
८ पांसऱ्या		१ कच्चा मण	१ क० म०
२० मण		१ खंडी	१ खं०

## धान्यादि मोझायाचे कोष्टक.

## पुणें चालीचा.

४ चिपटीं	हणजे	१ शेर	१ शे०
२ शेर		१ अधोली	१ अ०
२ अधोल्या		१ पायली	१ पा०
१२ पायल्या		१ मण	१ म०
२½ मण		१ पला	१ प०
८ पळे किंवा	}	१ खंडी	१ खं०
२० मण			

## मुंबई चालीचा.

२ टिपऱ्या	हणजे	१ शेर	१ शे०
४ शेर		१ पायली	१ पा०
१६ पायल्या		१ फरा	१ फ०
८ फरे		१ खंडी	१ खं०
२५ फरे		१ मुडा	१ मु०

## कोंकणांतील मीठ मोजायचा मापाचा कोष्टक.

१० $\frac{१}{२}$ अधोल्या	हणजे	१ फरा . . . . .	१ फ०
१०० फरे . . . . .		१ आणा . . . . .	१ आ०
१६ आणे . . . . .		१ रास . . . . .	१ रा०

२१७. सर्वपेक्षां जें लहान वजन कामांत घेतात, त्यास ग्रेन हणतात, आणि तें याप्रमाणें ठरविलें जातें. जर एक घनइंच पोकळीचें पात्र \*पाण्यानें भरलें, तर त्याचें वजन पूर्वीपेक्षां २५२.४५८ इतकें ग्रेन वाढेल. असे ठरविलेले ७००० ग्रेन अवार्ड्यूप्राईस चे एक पौंडांत असतात, आणि ५७६० ग्रेन त्रायचे पौंडांत असतात. सोने, रूपें, रत्नें आणि औषधें, इत्यादि खेरीज करून बाकी सर्व पदार्थांचें वजन करण्यासाठीं, अवार्ड्यूप्राईसचा पौंड नेहमी कामांत घेतात. तो पुढीलप्रमाणें विभागिला आहे.

## अवार्ड्यूप्राईसचें इंग्रजी वजन.

२७ $\frac{११}{३२}$ ग्रेन	हणजे	१ द्राम . . . . .	१ द्रा०
१६ द्राम . . . . .		१ औंस . . . . .	१ औ०
१६ औंस . . . . .		१ पौंड . . . . .	१ पौ०
२८ पौंड . . . . .		१ क्वार्टर . . . . .	१ क्वा०
४ क्वार्टर . . . . .		१ हनद्रेडवेट . . . . .	१ हं०
२० हनद्रेडवेट . . . . .		१ टन् . . . . .	१ ट०

अवार्ड्यूप्राईसचे १ पौंडांत ७००० ग्रेन आहेत. शुद्ध पाण्याचे एक घन फुटीचें वजन ६२.३२१०६०६ अवार्ड्यूप्राईसचे पौंड, अथवा ९९७.१३६९६९१ औंस आहे.

\* पाणी उकळून त्यापासून जी वाफ उत्पन्न होती, ती धरून थंड केल्यानें जें पाणी उत्पन्न होतें, तें पाणी वरचा अनुभव पाहण्यास घ्यावें, कारण अशानें तें निर्मळ होतें. त्याचे उष्णतेची स्थिती फारनहिटचे थर्मोमिटरचे ६२ अंशाबरोबर असवी.

या देशांतील सोने, रुपये, इत्यादि तोलायाचे वजनाचे कोष्टक.

पुणे चालीचा.			मुंबई चालीचा.		
८ गुंजा	ह्मणजे	१ मासा	३ $\frac{१}{३}$ बाल	ह्मणजे	१ मासा
१२ मासे . . . . .	१ तोळा		४० बाल किंवा		
२४ तोळे . . . . .	१ शेर		१२ मासे		१ तोळा
			२४ तोळे . . . . .		१ शेर

मोती तोलाचे कोष्टक.

पुणे चालीचा.			मुंबई चालीचा.		
१६ तांदूळ	ह्मणजे	१ रती	१३ $\frac{३}{४}$ टक्के	ह्मणजे	१ रती
२४ रती . . . . .	१ टांक		२४ रती . . . . .	१ टांक	

सोने, रुपये, रत्ने, आणि औषधे हीं वजन करण्यासाठीं त्रायचा पौंड कामांत घेतात, त्यांत ५७६० ग्रॅन आहेत, परंतु या दोन पक्षांत त्याचे भाग निरनिराळे आहेत. तीं मानें या पुढीलप्रमाणें आहेत.

इंग्रजी त्रायचें वजन.

२४ ग्रॅन	ह्मणजे	१ पेनीवेट . . . . .	१ पे०
२० पेनीवेट . . . . .	१ औंस . . . . .	१ औंस	१ औ०
१२ औंस . . . . .	१ पौंड . . . . .	१ पौंड	१ पौ०

त्रायचे पौंडांत ५७६० ग्रॅन आहेत. शुद्धपाण्याचे १ घन फुटीचें वजन त्रायचे ७५.७३७४ पौंड, किंवा ९०८'८४८८ औंस आहेत.



## इंग्रजी वैद्याचें वजन.

२० ग्रेन	ह्मणजे	१ स्कूपल्	३
३ स्कूपल्		१ द्राम	३
८ द्राम		१ औंस	३
१२ औंस		१ पौंड	१५

## पैक्याचे कोष्टक.

## दक्षिणदेशांतील पैक्याचा कोष्टक.

४ कवड्या	ह्मणजे	१ गंडा
२ गंडे		१ टोली
२ टोल्या		१ दमडी
४ दमड्या		१ पैसा
४ पैसे		१ आणा
४ आणे		१ पावला
४ पावले		१ रुपया
१५ रुपये		१ मोहोर

## सरकारी रीतिचा कोष्टक.

१०० रेस	ह्मणजे	१ पावला	१२ पै	ह्मणजे	१ आणा
४ पावले		१ रुपया	१६ आणे		१ रुपया

२१८. तांबें, रुपें आणि सोनें यांचें इंग्रजी चालतें नाणें या पुढीलप्रमाणें आहे; ह्मणजे १ पेनी, हें नाणें तांब्याचें आहे, आणि त्याचें वजन  $१०\frac{२}{३}$  द्राम आहेत; एक शिलिंग, याचें वजन ३ पेनिवेट आणि १५ ग्रेन आहे, त्यांत ४० भागांतून ३ भाग हीण आणि बाकी शुद्ध रुपें आहे; एक सावरेन, याचें वजन ५ पेनिवेट आणि  $३\frac{१}{४}$  ग्रेन आहे, यांत १२ भागांतून १ भाग तांब्याचा आहे, आणि बाकी शुद्ध सोनें आहे.

### इंग्रजी पैक्याचीं मानें.

सर्वांहून लहान नाणें फार्दिंग आहे, त्यास  $\frac{1}{4}$  असें मांडितात, कां कीं तो पेनीचा चवथा भाग आहे.

२ फार्दिंग ह्मणजे	१ अर्धपेनी . . . .	$\frac{1}{2}$ पे०
२ अर्धपेनी . . . .	१ पेनी . . . . .	१ पे०
१२ पेनी . . . . .	१ शिलिंग . . .	१ शि०
२० शिलिंग . . . .	१ पौंड*० सावरेन	१ पौंड०

२१९. अनेक तऱ्हेचे परिमाणांनीं एकादें परिमाण झालें असतें, आणि तें निरनिराळ्ये एकमांनीं दाखविलें असतें; जसें, १६० १४आ० ६पै, अथवा १पौ० १४शि० ६पे० अथवा, २ह० १का० ३पौ०; यांस विविधपरिमाणें ह्मणतात. स्पष्ट आहे, कीं वरचे कोष्टकांपासून कोणत्याहि पदार्थाचें विविध परिमाण, अनेक निरनिराळ्ये तऱ्हांनीं मापितां येईल. उदाहरण, जी रकम पांच रुपये आणि चार आण्यांची आहे, ती ८४ आण्यांची, अथवा १००८ पै ची, असेंहि ह्मणतात. कोणतेंहि परिमाण एक रूपांतून दुसऱ्ये रूपांत सहज नेतां येतें; आणि जा रितीस भांजणी ह्मणतात, ती सर्व जातींचे परिमाणांस कशी लावावी तें या पुढील उदाहरणांपासून समजेल.

पहिलें. १८ रु० १२ आ० ६ पै यांत किती पै आहेत ?

एक रूपांत १६ आणे आहेत, ह्मणून १८ रूपांत  $१८ \times १६$ , अथवा २८८ आणे आहेत, यामुळें १८ रुपये, १२ आणे, हे  $२८८ + १२$ , अथवा ३०० आणे आहेत. पुनः एक आण्यांत १२ पै आहेत, ह्मणून ३०० आण्यांत  $३०० \times १२$ , अथवा ३६०० पै आहेत. यामुळें १८रु०, १२ आ०, ६ पै यांत  $३६०० + ६$ , अथवा ३६०६ पै आहेत. ही कृति या पुढीलप्रमाणें होईल.

\* इंग्लिश पौंडाला विशेषकरून पौंड श्लिंग ह्मणतात, आणि ती £ या खुणेनें लिहितात.

रु० आ० पै

१८--१२--६

१६

$$२८८ + १२ = ३००$$

१२

$$३६०० + ६ = ३६०६ \text{ पै.}$$

दुसरें. ३६०६ पै यांत रुपये, आणे, आणि पै किती आहेत ?

३६०६ यांस १२ नीं भागिलें असतां भागाकार ३०० येतो, आणि बाकी ६ राहतात, ह्मणून ३६०६ पैंत ३०० आणे आणि ६ पै आहेत.

३०० यांस १६ नीं भागिलें असतां भागाकार १८ येऊन बाकी १२ राहतात, यावरून ३०० आण्यांत १८ रुपये आणि १२ आणे आहेत.

यामुळे ३६०६ पैंत ३०० आणे आणि ६ पै, अथवा १८ रुपये १२ आणे आणि ६ पै आहेत. आणि ही कृति या पुढीलप्रमाणें आहे.

पै

$$१२)३६०६$$

$$१६)३०० \dots ६$$

$$१८रु०१२आ०६पै०$$

तिसरें. १८ पौ० १२ शि० \*६ $\frac{३}{४}$  पे० यांत किती फार्दिंग आहेत ?

जापेक्षां एक पौंडांत २० शिलिंग आहेत, ह्मणून १८ पौ०, यांत १८×२०, अथवा ३६० शिलिंग आहेत; यामुळे १८पौ० १२ शि० हे ३६०+१२, अथवा ३७२ शिलिंग आहेत. जापेक्षां एक शिलिंगांत १२ पेनी आहेत, ह्मणून ३७२ शिलिंगांत ३७२×१२, अथवा ४४६४ पेनी आहेत; आणि यामुळे १८ पौ० १२ शि० ६ पे० यांत ४४६४+६, अथवा ४४७० पेनी आहेत.

एक पेनीमध्ये ४ फार्दिंग आहेत, ह्मणून ४४७० पेनीमध्ये ४४७०×४, अथवा १७८८० फार्दिंग आहेत; आणि, यामुळे १८ पौ० १२ शि० ६ $\frac{३}{४}$  पै०

\*फार्दिंग निराळे मांडीत नाहीत, परंतु पेनीचे भाग रूपानें मांडितात. जसें तीन फार्दिंग हे एक पेनीचे  $\frac{३}{४}$  आहेत, आणि त्यांस  $\frac{३}{४}$  अथवा  $\frac{३}{४}$  याप्रमाणें मांडितात.  $\frac{३}{४}$  अथवा  $\frac{३}{४}$  याप्रमाणें एक अर्ध पेनी लिहितात; परंतु दुसरी तऱ्हा फार करून घेतात.

यांत १७८८०+३, अथवा १७८८३ फार्दिंग आहेत. ही सर्व कृति या पुढीलप्रमाणे मांडितात.

$$\begin{array}{r}
 \text{पौ०} \quad \text{शि०} \quad \text{पे०} \\
 १८ \dots १२ \dots ६\frac{३}{४} \\
 २० \\
 \hline
 ३६०+१२=३७२ \\
 \quad \quad १२ \\
 \hline
 ४४६४+६=४४७० \\
 \quad \quad \quad ४
 \end{array}$$

१७८८०+३=१७८८३ फार्दिंग.

चवथें. १७८८३ या फार्दिंगांत किती पौंड, शिलिंग, पेनी आणि फार्दिंग आहेत ?

जापेक्षां १७८८३ यांस ४ नीं भागिलें असतां, भागाकार ४४७० येतो, आणि बाकी तीन रहातात, ह्मणून १७८८३ फार्दिंगांत (२१८) प्रमाणें ४४७० पेनी आणि ३ फार्दिंग आहेत.

जापेक्षां ४४७० यांस १२ नीं भागिलें असतां, भागाकार ३७२ येतो, आणि बाकी ६ रहातात, ह्मणून ४४७० पेनीमध्ये ३७२ शिलिंग, आणि ६ पेनी आहेत.

जापेक्षां ३७२ यांस २० नीं भागिलें, तर भागाकार १८ येतो, आणि बाकी १२ रहातात, ह्मणून ३७२ शिलिंगांत १८ पौंड, १२ शिलिंग आहेत.

यामुळे १७८८३ फार्दिंगांत ४४७० $\frac{३}{४}$  पेनी, अथवा ३७२ शि० ६ $\frac{३}{४}$  पे०, अथवा १८ पौ० १२ शि० ६ $\frac{३}{४}$  पे० आहेत.

ही कृति या पुढीलप्रमाणे होईल;

फार्दिंग.

$$४)१७८८३$$

$$१२)४४७० \dots ३$$

$$२०)३७२ \dots ६$$

$$१८ \text{ पौ० } १२ \text{ शि० } ६\frac{३}{४} \text{ पे०}$$

## अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

अ जवळ १०० रुपये, ४ आणे, ११ $\frac{१}{२}$  पै आणि ब. जवळ ६४३९२ पै आहेत. जर अ ला १४९२ पै, आणि ब ला १६० २ आ०, ३ $\frac{१}{२}$  पै मिळाल्या, तर कोणाजवळ अधिक पैका होईल, आणि तो किती होईल ?

उत्तर. अहून २२८ रु० ७ आ० व जवळ अधिक होतील.

पुढील कोष्टकांत जीं समोरासमोर परिमाणें आहेत तीं एक सारिखीं-च आहेत. ह्मणून प्रत्येक आडव्ये ओळीपासून दोन उदाहरणें निघतील.

१ रु० १ पा० २ आ०	५६३२ कवड्या.
१५ पौ० १८ शि० ९ $\frac{१}{२}$ पे०	१५३०२ फार्दिंग.
६२ रु० २ पा०	१००० आ०, अथवा १२००० पै.
११५ पौ० १ औ० ८ पे०	६६३०७२ ग्रेन.
२० शे० १५ तो०	४७५२० गुंजा.
३ पौ० १४ औ० ९ द्रा०	१००१ द्राम.
५९ खं० १० म० ३० शे०	४७६३० शेर.
३ मै० १४९ या० २ फु० ९ इंच०	१९५४७७ इंच.
५ को० ५०० दं०	१०५०० दंड.
१९ बु० २ पे० १ म्या० २ क्वार्ट	१२६० पेंट.
४ फ० ८ पा० ३ शे १ टि०	५८३ टिपन्या कैली मुंबई चालीचा.
१६० २३' ४७"	५९०२७ सेकंद.
१० म० ९ दि० २ प्र० ५ घ०	१८५६० घटिका.

२२०. सांगितल्या संख्या अपूर्णांक असल्या, तरी वर प्रमाणेंच करितां येईल. एक रुपयाचा  $\frac{१}{३}$  यांत किती आणे व पै आहेत ? आतां रुपयाचा  $\frac{१}{३}$  हा १६ आण्यांचा  $\frac{१}{३}$  आहे; १६ चा  $\frac{१}{३}$  हा  $\frac{१६ \times १}{३}$  आहे, अथवा  $\frac{१६}{३}$ , अथवा  $(१०५) ५\frac{१}{३}$  आणे आहेत. पुनः एक आण्याचा  $\frac{१}{३}$  हा १२ पैचा  $\frac{१}{३}$ , अथवा ४ पै आहेत. यावरून एक रुपयाचा  $\frac{१}{३} = ५$  आणे आणि ४ पै आहेत. आणखी, एक दिवसाचे २३ हे  $२३ \times २४$ ,

किंवा ५.५२ अवर आहेत; आणि एक अवराचे ५२ हे ५२×६०, अथवा ३१.२ मिनिटें आहेत; आणि एक मिनिटाचे २ हे २×६०, अथवा १२ सेकंद आहेत; यावरून एक दिवसाचे २३ हे ५ अ० ३१ मि० १२ से० आहेत.

पुनः मनांत आण कीं ६आणे आणि ८पै मिळून, एक रूपयाचा कोणता भाग असें विचारिलें आहे. जापेक्षां ६आ० ८पै० हे ८० पै आहेत, आणि एक रूपयांत १६×१२ किंवा, १९२ पै आहेत, तर रूपयाचा १९२ भागांतून ८० भाग घेतल्यानें ६ आणे आणि ८ पै हे रूपयाचा कोणता भाग आहे हें समजेल. तर तो (१०७)प्रमाणें  $\frac{८०}{१९२}$  रुपये आहे; परंतु (१०८)प्रमाणें  $\frac{८०}{१९२} = \frac{५}{१२}$ ; यामुळे ६ आणे आणि ८ पै =  $\frac{५}{१२}$  रु० आहेत.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणे.

अ० मि०

एक दिवसाचे  $\frac{३}{४}$  हे - - - ९ - - ३६, अथवा २४ घटिका आहेत.

अ० मि० से०\*

एक दिवसाचे १२८४१ हे - - - ३ - - ४ - - ५४.६२४

पौ० औ० द्रा०

एक हंड्रडवेटाचे २५७ हे - - २८ - १२ - ८.७०४ आहेत.

शि० पे० फा०

पौंडाचे १४९३६ हे - - २ - ११ - ३.३८५६ आहेत.

रूपयाचे १४९३६ हे - - २ आ० - - ४ पै० ६७७१२ आहेत.

२२१, २२२. शिलिंग, पेनी, आणि फार्दिंग, यांस पौंडाचे दशांशाचें रूप देण्याची रीति, पुढें या ग्रंथपुरवणीमध्ये दाखविली आहे.

जेव्हां पूर्णांकाचे उजव्याकडे दशांश येतात, तेव्हां जा जातीचे पूर्णांकाचे एक आहेत, त्याच जातीचे दशांश आहेत. जसें, ५.५ से० हे पांच सेकंद आणि एक सेकंदाचे पांच दशांश आहेत. जसें, ०.५ सेकंद हे एक सेकंदाचे पांच दशांश आहेत; आणि ०.३ अवर हे एक अवराचे तीन दशांश आहेत.

दशांशाचे नाण्या विषयीं जें पुरवणीमध्ये सांगितलें आहे तें पहा. त्या पुरवणींत जा रिती सांगितल्या त्यांशीं शिकणारानें पक्कें माहीत असावें हें योग्य आहे.

२२३. एक्ये जातीचे दोन विविध परिमाणांची बेरीज करण्याची रिती, या पुढील उदाहरणापासून स्पष्ट कळेल. मनांत आण कीं, १९२ रु० १४ आ०  $२\frac{१}{२}$  पै हे ६४ रु० १३ आ०  $११\frac{३}{४}$  पै यांशीं मिळवायाचे आहेत. या दोहोंतील निरनिराळे भाग मिळविल्याने जें होतें, ती बेरीज आहे. आतां.

$$\begin{array}{r} \text{पै पै पै} \quad \text{रु०} \quad \text{आ०} \quad \text{पै} \\ \frac{३}{४} + \frac{१}{२} = \frac{५}{४} \quad = ० \quad - \quad ० \quad - \quad १\frac{१}{४} \quad (२१९) \text{ प्रमाणें.} \\ \text{पै पै पै} \end{array}$$

$$११ + २ = १३ \quad = ० \quad - \quad १ \quad - \quad १$$

आ आ आ

$$१३ + १४ = २७ = १ \quad - \quad ११ \quad - \quad ०$$

$$\text{रु६४ + रु१९२} = २५६ \quad - \quad ० \quad - \quad ०$$

या सर्वांची बेरीज = रु० २५७ - - १२ - -  $२\frac{१}{४}$  आहे.

ही कृति एकदांच करून, पुढीलप्रमाणें मांडितात;

$$\begin{array}{r} \text{रु० १९२} \dots १४ \dots २\frac{१}{२} \\ \text{रु० ६४} \dots १३ \dots ११\frac{३}{४} \\ \hline \text{रु० २५७} \dots १२ \dots २\frac{१}{४} \end{array}$$

पहिल्यानें पैचे अपूर्णाकांची बेरीज घेऊन, त्यांतील पूर्ण पै हातचा घेऊन अपूर्णाक खाली मांड; नंतर पैचे ओळींत हातचा आलेल्या पै मिळीव; आणि त्या बेरीजेत किती आणे व पै आहेत ते पाहून त्यांतील, पै मात्र मांडून, आणे हातचे घेऊन आप्यांचा ओळींत मिळीव आणि या प्रमाणें पुढें कर. दुसरे कांहीं जातींचे परिमाणांची बेरीज घेण्याविषयीं हीच रिती लागू होईल. आणि कोष्टक पाठ केल्यावर, कृति करायास सोपें पडेल.

२२४. (४०) कलमांतील सांग्रितल्ये रितीप्रमाणें वजावाकी करितां येईल, हणजे, जर दोन परिमाणांस एक सारिखेंच परिमाण मिळविलें, तर त्या दोन परिमाणांचे अंतरांत कांहीं फेर पडत नाही. मनांत

आण, कीं २४रु० ५आ० ७ पै यांतून १९रु० १३आ० १०पै० हे वजा करायाचे आहेत. हीं परिमाणें या पुढीलप्रमाणें मांड;

रु० २४ -- ५ -- ७

रु० १९ -- १३ -- १०

जापेक्षां ७पै तून १०पै वजा होत नाहींत, ह्मणून या दोन परिमाणांस १ आणा मिळीव, ह्मणजे वरचे परिमाणास १२पै मिळीव, आणि खालचे परिमाणास १आणा मिळीव. यावरून वरचे ओळींत १९पै आणि खालचींत १४आणे होतील, त्यांची वजावाकी करून बाकी ९पै खालीं मांड; जापेक्षां खालचे ओळीचे आणे १ नें वाढविले, ह्मणून खालचे ओळींत १४ आणे आणि वरचे ओळींत ५ आणे आहेत. वरचे ओळीला १६ आणे आणि खालचे ओळीला १ रुपया मिळवून, खालचे ओळीचे आणे वरचा ओळीचा आप्यांतून वजाकरून बाकी ७ आणे राहातात. आतां खालचे ओळींत २०रु० आणि वरचे ओळींत २४रु० आहेत, आणि त्यांची वजावाकी ४रु० आहे; या-मुळे या दोन रकमांची वजावाकी ४रु० ७आ० ९पै आहे. वेगवेगळ्या रकमांशीं जें जें वेगळालें मिळविलें आहे, त्या रूपानें मांडलें असतां, कृति याप्रमाणें होईल.

रु० २४ . . २१ . . १९

रु० २० . . १४ . . १०

बाकी रु० ४ . . ७ . . ९ \*

२२५. कोष्टकांतून दुसऱ्ये कोणखेहि जातीचे परिमाणांस ही रीति लावितां येईल. याजकरितां दुसरें एक उदाहरण देतों;

७ह० २कार० २१पौ० १४औं० यांतून  
२ह० ३कार० २७पौ० १२औं० हे वजाकर

मागील कलमाप्रमाणें फेरफार केल्यानंतर उदाहरण याप्रमाणें होतें;

७ह० ६कार० ४९पौ० १४औं० यांतून  
३ह० ४कार० २७पौ० १२औं० हे वजाकर  
४ह० २कार० २२पौ० २औं० बाकी.



या आणि दुसऱ्या सर्व उदाहरणांत पुढीलप्रमाणे कृतींत कांहीं संक्षेप करितां येईल. एथें २१पौंडांत २७ पौंड जात नाहीत, ह्मणून वजाबाकी करित नाहीं, परंतु २१पौंडांत १का० अथवा २८ पौंड मिळवितों, नंतर त्या बेरिजेंतून २७पौ० वजा करितों. पहिल्यानें १का० अथवा २८पौ० यांतून २७पौ० वजा करून बाकी, २१पौंडांत मिळविली असतां, कृति तोंकडी होऊन उत्तर सारिखेंच निघेल.

### २२६. अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

एका व्यापारी मनुष्याचीं पांच दुकानें होतीं त्यांतून तीन दुकानांत त्यास नफा झाला तो या पुढीलप्रमाणे १५४०रु० १२आ० ८पै, आणि ३०५ रु० ४आ० ३पै, आणि ७५०रु० २आ० ६पै; आणि दोन दुकानांत तोटा झाला तो ९१०रु० ८आ० ६पै, आणि ६८५रु० १०आ० ११पै. तेव्हां त्या सावकारास नफा काय राहिला?

उत्तर. १००० रुपये नफा झाला.

एका मनुष्यास या पुढील रकमा घेणें आहेत, १९३पौ० १४शि० ११<sup>३</sup>/<sub>४</sub>पै०, २०पौ० ०शि० ६<sup>३</sup>/<sub>४</sub>पै०, ६४७३पौ० ०शि० ०पै०, आणि ४९पौ० १४शि० ४<sup>३</sup>/<sub>४</sub>पै०, आणि त्यास पुढील कर्ज देणें आहे; २००पौ० १९शि० ६<sup>३</sup>/<sub>४</sub>पै०, ३०५पौ० १६शि० ११पै०, २२पौ०, आणि १९पौ० ६शि० ०<sup>३</sup>/<sub>४</sub>पै०, तर सर्व कर्ज फेडून त्याजवळ बाकी किती राहिल?

उत्तर. ६१९पौ० ७शि० ४<sup>३</sup>/<sub>४</sub>पै०

अ, ब, क, ड, अशीं चार शहरें अनुक्रमानें एकापुढें एक आहेत. आणि जर एक मनुष्य ५अ० २०मि० ३३से० इतक्या काळांत अ पासून ब जवळ जातो; ६अ० ४९मि० २से० इतक्या वेळांत ब पासून क जवळ जातो; आणि १९अ० ०मि० १७से० इतक्या काळांत अ पासून ड जवळ जातो; तर ब पासून ड पर्यंत, आणि क पासून ड पर्यंत जाण्यास त्या मनुष्याला किती काळ लागेल?

उत्तर, १३अ० ३९मि० ४४से० आणि ६अ० ५०मि० ४२से०

२२७. गुणाकाराची कृति करायासाठी, लक्षांत ठेवावे कीं, जसे (५२) कलमांत सांगितलें, कीं जर कांहीं परिमाण अनेक भागांत विभागून, तो प्रत्येक भाग भलत्ये कांहीं संख्येनें गुणिला, आणि त्यांचे वेगळाल्ये गुणाकारांची बेरीज घेतली, तर त्यापासून जें उत्तर निघतें, तें आणि तीं सर्व परिमाणें त्याच संख्येनें गुणून जें उत्तर निघतें, हीं दोनीं उत्तरें सारखींच होतील.

७६० १३आ० ६पै यांस १३ नीं गुणायाचें आहे. यांतील पहिलें परिमाण ७ रुपये, १३ आणे, आणि ६पै, या वेगळाल्ये भागांनीं झालें आहे. आणि

रु० आ० पै.

६पै० × १३ = ७८पै० अथवा --- ० -- ६ -- ६ आहेत.

१३आ० × १३ = १६९आ० अथवा --- १० -- ९ -- ०

७६० × १३ = ९१६० अथवा --- ९१ -- ० -- ०

या सर्वांची बेरीज रु० १०१ -- १५ -- ६ आहेत.

ही बेरीज यांचे बरोबर आहे, रु० ७ -- १३ -- ६ × १३.

ही कृति बहुतकरून पुढीलप्रमाणें मांडितात;

रु० आ० पै०

७ . . १३ . . ६

१३

रु०.. १०१..१५ . . ६

२२८. (७४) कलमांत जें मूळ कारण सांगितलें आहे, त्यावरून भागाकार करितात, ह्मणजे, जर कांहीं परिमाण अनेक भागांत विभागिलें, आणि तो प्रत्येक भाग, भलत्ये कांहीं संख्येनें विभागिला, तर त्या वेगळाल्ये भागाकारांची बेरीज, तें सर्व परिमाण त्याच संख्येनें भागून जो भागाकार येईल, त्याचे बरोबर आहे. मनांत आण, कीं ९९रु० १४आ० ९पै यांस १३नीं भागायाचें आहे. जापेक्षां ९९ भागिले १३ नीं, तर भागाकार ७ येऊन बाकी ८ राहतात; मुळचें सर्व परिमाण, १३रु० × ७, अथवा ९१रु० आणि ८ रु० १४आ० ९पै यांणीं झालें आहे. १३ भाज्य असून पहिल्ये रकमेचा भागाकार ७रु० आहे; दुसरीचा

भागाकार काढायाचा राहिला आहे. जापेक्षां ८६० हे १२८ आणे आहेत, ह्मणून ८६० १४ आ० ९ पै हे १४२ आणे आणि ९ पै आहेत, आणि १४२ यांस १३ नीं भागून भागाकार १० येऊन, बाकी १२ राहतात; १४२ आणे आणि ९ पै हे  $१३ \times १०$ , अथवा १३० आणे, आणि १२ आणे, ९ पै यांणी झाले आहेत, यांतील पहिल्याचा भागाकार १० आणे आहे, आणि दुसऱ्याचा भागाकार काढायाचा राहिला. आतां १२ आणे यांत १४४ पै आहेत, ह्मणून १२ आणे, ९ पै मिळून १५३ पै आहेत, यांस १३ नीं भागून भागाकार ११ येऊन बाकी १० राहतात; ह्मणजे १५३ पै, ह्या  $१३ \times ११$ , किंवा १४३ पै आणि १० पै मिळून झाल्या आहेत; आणि पहिल्याचा भागाकार ११ पै, आणि बाकी पैचे  $\frac{१०}{१३}$  आहेत. यावरून सर्व परिमाणाचा १३ वा भाग ७ ६० १० आ०  $११ \frac{१०}{१३}$  पै आहे. ही सर्व कृति पुढीलप्रमाणें मांडितात; आणि पुढील अभ्यासासाठीं सांगितलेल्या उदाहरणांस, तशेच तऱ्हेची कृति लावितां येईल.—

६०	आ०	पै०	६०	आ०	पै०
१३)	९९	--	१४	--	९
	९१		(७	--	१०
	<u>८</u>		--	--	$११ \frac{१०}{१३}$
	१६				
	<u>१२८</u>				
	१४२				
			१३०		
			<u>१२</u>		
			१२		
			<u>१४४</u>		
			९		
			१५३		
			<u>१३</u>		
			२३		
			<u>१३</u>		
			१०		

यांत ९९, १४२, १५३, या प्रत्येक संख्या चालत्ये रितीप्रमाणें १३ नीं भागिल्या आहेत, परंतु भाजक केवळ पहिल्या रकमेचा डावेकडेस मात्र मांडिला आहे.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$$२खं० ३म० ७शे० \times ३४ = ७३खं० ७म० ३८शेर.$$

$$२ह० १का० २१पौंड ७औंस \times ५३ = १२९ह० १का० १६पौ० ३औं०$$

$$१७रु० ५आ० ७पै \times ८५ = १४७४रु० १०आ० ७पै$$

$$२दि० ४अ० ३मि० २७से० \times १०९ = २३६दि० १०अ० १६मि० ३से०$$

$$२७पौ० १०शि० ८पे० \times ५६९ = १५६६६पौ० ९शि० ४पे०$$

$$१८७ रु० \times \frac{३}{४} = ८०रु० २आ० ३\frac{३}{४}पै.$$

$$१६६पौ० \times \frac{८}{३३} = ४०पौ० ४शि० १०\frac{६}{३३}पे०$$

$$१८७पौ० ६शि० ७पे० \times \frac{३}{१००} = ५पौ० १२शि० ४\frac{३}{४}\frac{२}{२५}पे०$$

$$४शि० ६\frac{१}{२}पे० \times ११२१ = २५४पौ० ११शि० २\frac{१}{२}पे०$$

२२९. मनांत आण, कीं ३रु० १२आ० ८पै० यांत, २ आणे ४पै, किती वेळा जातात हें इच्छिलें आहे. तर पहिल्यानें प्रत्येकांत किती पै आहेत तें काढावें. (२१९) प्रमाणें, पहिल्या रकमेत ७२८पै, आणि दुसरींत २८पै आहेत. आतां, ७२८ यांत २८ हे २६ वेळा जातात; यामुळें पहिलें परिमाण दुसरे परिमाणाहून २६ वेळा अधिक आहे. जा उदाहरणांत, रुपये, आणे, पै, येतात, त्यांत रुपयांचे दशांश कामांत घ्यावे हें बरें, ह्मणजे उत्तर पुरतेपणीं जवळ जवळ येईल. जसें, २आ० - - ४पै हे १४५८३रु० आहेत; आणि ३रु० १२आ० ८पै० हे ३७९१६रु० आहेत; तर ३७९१६ यांस १४५८३ यांणीं भागिल्यानें २६  $\frac{१४५८३}{१४५८३}$  हा भागाकार येतो. हा पक्ष रूढीचे फार बाहेरचा आहे, कां कीं जितका भाजक लहान असेल, तितकी अधिक चूक सांगितल्ये दशांशांत येईल.

## अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१७शे० १२ तो० ७ मा० ३ गुं० यांत, १ शे० २ तो० ३ मा० हे किती वेळा जातील ?

उत्तर. १६०२३४

६ह०, २कार०, यांत १कार०, १४पौंड०, १औं०, हे किती वेळा जातात? आणि १दि०, २अ०, ०मि०, ४७से०, यांत ३मि०, ४६से०, हे किती वेळा जातात ?

उत्तर. १७३०७५८, आणि ४१४३६७२५७.

जर २हं०, ३का०, १पौं०, यांस १५०पौं० १३शि० १०पे० पडतात तर १ पौंडास काय पडेल ?

उत्तर. ९शि० ९ $\frac{१३}{३०९}$  पे०

एक वाणी दर पौंडास ११ पे० दराची २ह०, १५पौं०, साकर घेतो, आणि दर पौंडास ५ पे० दराची १४ ह०, ३ पौं, साकर घेतो, आणि त्या दोन्हीं जातींची साकर मिश्र करितो. तर खास तोटा न होतां, ती मिश्र साकर कोणत्या दरानें त्याणें विकारी ?

उत्तर. ५ पे०  $\frac{३१५३}{४२०५}$

२३०. गुणाकार करायाची एक सोईची रीत आहे, तीस वरावर्दी म्हणतात. जर एक खंडीस २रु० १४आ० ६पै० पडतात, तर १५३ खंडींस काय पडेल असें विचारिलें आहे असें मनांत आण. ही रकम १५३ नीं गुणून, तो गुणाकार सर्वांची किंमत होईल हें स्पष्ट आहे.— परंतु दर खंडीस २रु० १४आ० ६पै या दरानें १५३ खंडी विकत घेतल्या तर पहिल्यानें प्रत्येक खंडीस २ रुपये प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस ८ आणे प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस ४ आणे प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस २ आणे प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस ६ पै प्रमाणें; १५३ खंडींचा पैक्याचा निरनिराळ्या रकमा काढून त्यांची बेरीज एकंदर पैका होईल. ही कृति या पुढीलप्रमाणें आहे

१. खंडीस २ रु० प्रमाणें १५३ खंडी-  
ची किमत - - - - - ३०६रु०--०आ०--०पै.
२. जापेक्षां ८ आणे हे १ रु० याचें अर्ध  
आहे, ह्मणून १ खंडीला ८ आणे या  
दरानें, १५३ खंडींची किमत  $\frac{१५३}{२}$   
आहे. - - - - - ७६ -- ८ -- ०.
३. ४आणे हे ८ आण्यांचें अर्ध आहे,  
ह्मणून एक खंडीस ८ आणें प्रमाणें  
१५३ खंडींस जी किमत पडली  
तिचे निमे किमत ४ आणे दरानें  
होईल; अथवा ७६रु० ८आ० यांचें  
अर्ध ह्मणजे - - - - - ३८ -- ४ -- ०.
४. ४ आण्यांचें अर्ध २ आणे आहे, ह्म-  
णून दर खंडीस ४आणे प्रमाणें  
१५३ खंडींची जी किमत, तिचें अर्ध  
२ आणे दरानें होईल. - - - - - १९ -- २ -- ०.
५. २ आण्याचा  $\frac{१}{४}$  सहा पै होतात ह्म-  
णून दरखंडीस ६ पै प्रमाणें १५३  
खंडींची किमत १९ रु०--२ आ०  
यांचा  $\frac{१}{४}$  होईल. - - - - - ४ -- १२ -- ६.
- या सर्व रकमांची बेरीज - - - - - ४४४रु०--१०आ०--६पै.  
ही बेरीज २ रु० १४ आ० ६ पै  $\times$  १५३ यांचे बरोबर आहे.-  
ही कृति या पुढीलप्रमाणें मांडितात.-

	दरखंडीस १ रु. प्रमाणें	१५३रु.०आ. पै
२रु० हे $२ \times १$ रु० आहेत,	२ -- ० -- ०	३०६-- ०--०
८आ० हे १ रु० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० -- ८ -- ०	७६-- ८--०
४आ० हे ८आ० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० -- ४ -- ०	३८-- ४--०
२आ० हे ४आ० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० -- २ -- ०	१९-- २--०
६पै० ह्या २आ० चा $\frac{१}{४}$ आहे,	० -- ० -- ६	४--१२--६
बेरीज	२रु० १४आ० ६पै	४४४रु. १०.६

## दुसरें उदाहरण.

एक पौंडास ९शि० १० $\frac{३}{४}$  पे० प्रमाणें १७३५ पौंडास काय पडेल?  
 ०शि० ४शि० १०पे० आणि  $\frac{१}{२}$  पे० आणि  $\frac{१}{४}$  पे० मिलून सर्व किंमत ९शि०  
 १० $\frac{३}{४}$  पे० होती; त्यांतून ५शि० हे १पौ० चा  $\frac{१}{४}$  आहे, ४शि० हे १पौ०  
 चा  $\frac{१}{४}$  आहे, १० पे० हे ५शि० चा  $\frac{१}{४}$  आहे,  $\frac{१}{२}$  पे० हा १० पे०  
 चा  $\frac{१}{२}$  आहे, आणि  $\frac{१}{४}$  पे० हा  $\frac{१}{२}$  पे० चा  $\frac{१}{२}$  आहे. पूर्वीचे  
 उदाहरणाप्रमाणें कृति केली असतां, याप्रमाणें होईल;

	पौ०	शि०	पे०
दर पौ० १ पौ० प्रमाणें	१७३५	- - -	०
५शि० हे १पौ० चा $\frac{१}{४}$ आहे,	०	- - ५	- - ०
४शि० हे १पौ० चा $\frac{१}{४}$ आहे,	०	- - ४	- - ०
१० पे० हे ५शि० चा $\frac{१}{४}$ आहे,	०	- - ०	- - १०
$\frac{१}{२}$ पे० हा १० पे० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	०	- - ०	- - ० $\frac{३}{२}$
$\frac{१}{४}$ पे० हा $\frac{१}{२}$ पे० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	०	- - ०	- - ० $\frac{३}{४}$
वेरीज केल्यानें,	पौ० ००	- - ९	- - १० $\frac{३}{४}$
	पौ० ८५८	- - ९	- - ३ $\frac{१}{४}$

सर्व उदाहरणांत, पहिल्यानें सांगितल्ये किंमतीचे पुष्कळ भाग करावे, असे कीं त्यांतून प्रत्येक भाग त्याचे पूर्वीचे भागाचा कांहीं सरळ \* अपूर्णाक असेल. हे भाग करण्याविषयी कांहीं रीति सांगतां येत नाहीं, परंतु प्रत्येक उदाहरणांत भाग कसे करावे, याची रीति अभ्या-

\* एकाचा कोणताहि अपूर्णाक जाचा अंश एक आहे, त्यास त्या एकाचा निःशेष भाग बहुतकरून झणतात. जसे. २ शि० आणि १० शि० हे दोन्ही एक पौंडाचे निःशेष भाग आहेत, कारण ते  $\frac{१}{२}$  पौ० आणि  $\frac{१}{२}$  पौ० आहेत.

सानें समजेल. याप्रमाणें भाग केल्यावर प्रत्येक भाग, किंमत आहे असें मानून, सर्व परिमाणांची किंमत काढावी आणि नंतर त्यांची बेरीज घ्यावी.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

२४३ह० यांस काय पडेल, जर १ह० यास १४पौ० १८शि० ८५पे० पडतात ?

उत्तर. ३६२९पौ० १शि० ०५पे०

एक बुशलास २पौ० १शि० ३५पे० पडतात, तर १६९ बुशलांस काय पडेल ?

उत्तर. ३४८पौ० १४शि० ९५पे०

एक कार्टरास १९ शि० २ पे० पडतात, तर २७३ कार्टरांस काय पडेल ?

उत्तर. २६१पौ० १२शि० ६पे०

जर १ विघ्यास २रु० १३आ० ७पै पडतात, तर ५९५ विघ्यांस काय पडेल ?

उत्तर. १६९५रु - - २ आ - - १ पै.

२३१. जेव्हां दिलेलीं परिमाणें कोष्टकाचा अनुक्रमाप्रमाणें नसतील, परंतु व्यवहारी, किंवा दशांश अपूर्णाक असतील, त्यांसहि या रिती लावितां येतील, असें या सर्व अध्यायापासून कळेल. याविषयीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत.

एक हॅट्टेडवेटास २रु० १आ० ३पै पडतात, तर २७२३४७९ ह० काय पडेल ?

उत्तर ५६५९७२९ रु०, अथवा ५६५रु० १५आ० ६पै.

एक शेरास २ आणे, ६ पै प्रमाणें ६६ $\frac{१}{२}$  शेरांस १०रु ६आ० ३पै पडतात.

एक एकरास ३१०७६ पौ० पडतात, तर २७९३०१ एकरांस किती पौ० शि० पे० पडतील ?

उत्तर, ८६७९५५८पौ०, अथवा ८६७ पौ० १९शि० १५पे०



एक बुशलास १७पौ० १४शि० यांचे  $\frac{२}{३}$  चे  $\frac{१}{२}$  पडतात, तर १७बु० चे  $\frac{३}{१३}$  चे  $\frac{१}{४}$  यांस काय पडेल ?

उत्तर २२१४६पौ०, अथवा २पौ० ६शि० ३ $\frac{१}{२}$ पे०

जर १ तोळा सोन्यास १५रु० १०आ० ८पै पडतात, तर ५२० तोळे ९ मासे यांस काय पडेल ?

उत्तर, ८१५८रु० ६आ० ८पै.

२३२. दर दिवसास अमुक रकम सांगीतली, तर एक वर्षांत एकंदर किती होईल, हें जाणायाची वारंवार गरज लागती. ही रकम थोडक्यांत काढितां येईल, कां कीं जापेक्षां एक वर्षाचे दिवसांची संख्या, २४०+१२०+५ आहे; तर दरदिवस एक पेनी प्रमाणें १वर्षांत १पौ०,  $\frac{१}{२}$ पौ०, आणि ५ पेनी एकंदर होतील. त्यावरून ही रीति निघती. दररोज सांगितल्ये रकमे प्रमाणें, एक वर्षांत एकंदर किती होईल, हें जाणायासाठीं, त्या रकमेत पेनी आणि पेनीचे अपूर्णाक किती आहेत हें काढ; त्यांस त्यांचें अर्ध मिळवून जितक्या पेनी होतील तितके ते पोंड आहेत, आणि प्रत्येक फार्दिंग ५ शिलिंगांबरोबर आहे असे समज; नंतर दररोजाचे रकमेची पांचपट त्यांत मिळवली असतां, वर्षाची सगळी एकंदर कळेल. उदाहरण, दररोज १२ शि० ३ $\frac{३}{४}$ पे० प्रमाणें एक वर्षांत एकंदर रकम किती होईल? यांत १४७ $\frac{३}{४}$  पेनी आहेत, आणि त्यांचें अर्ध ७३ $\frac{३}{४}$  पेनी आहे, तर या दोहोंची बेरीज २२१ $\frac{३}{४}$  पेनी आहे, हे पोंड झटले असतां २२१पौ० १२शि० ६पे० होतील. पुनः १२शि० ३ $\frac{३}{४}$ पे० × ५ हे ३पौ० १शि० ६ $\frac{३}{४}$ पे० आहेत, हे पूर्वीचे रकमेशीं मिळवले असतां, एक वर्षाची एकंदर रकम २२४पौ० १४शि० ० $\frac{३}{४}$ पे० होईल. त्याच रीतीप्रमाणें, दररोज २शि० ३ $\frac{१}{२}$ पे० प्रमाणें एक वर्षाची रकम ४१पौ० १६शि० ५ $\frac{१}{२}$ पे० आहेत; आणि दररोज ६ $\frac{३}{४}$ पे० प्रमाणें वर्षाची एकंदर १०पौ० ५शि० ३ $\frac{३}{४}$ पे० आहेत; आणि दररोज ११पे० प्रमाणें वर्षाची एकंदर १६पौ० १४शि० ७पे० आहेत.

२३३. वहिवाटीचे कामास चालेल अशी, पुढीलप्रमाणें वरचे रीतिचे उलटी रीति काढितां येईल; जर एक वर्षांत ३६०, अथवा २४० चे  $\frac{३}{२}$  दिवस असतात असे कल्पिलें, तर दरवर्षास जी रकम आहे, त्यांतून तिचा  $\frac{१}{३}$  यांश वजा केला तर बाकी २४० दिवसांचें प्रमाण नि-

घेल; आणि अज्ञा रितीने काढलेला प्रत्येक पौंड, पेनी असे मानिले असतां, ते पेनी एक दिवसाची रकम होईल. परंतु जापेक्षां वर्ष ३६० दिवसांचे नाही, परंतु ३६५ चे आहे, ह्मणून वर ठरविल्याप्रमाणे प्रत्येक दिवसाचा भाग घेऊन, त्यास ३६५ भागांत विभागून त्यांतून ५ काढिले, तर ३६० या सर्व भागांतून जी सर्व रकम वजा केली ती, अथवा ३६०×५ तसेले भाग, यांतून पहिल्याने जे ५ दिवस सोडले आहेत, त्यांतले प्रत्येक दिवसास ३६० भाग येतील. जापेक्षां आरंभी ३६० भाग केले आणि ३६५ तून ५ भाग काढिले, ह्मणून प्रत्येक पहिल्या दिवसाविषयीं ३६० भाग राहिले; यामुळे या अधिक कृतीने वर्षाची सर्व रकम ३६५ दिवसांस सारखी वांटिली जाती. आतां ३६५ तून ५ भाग, हे ७३ तून एक भाग घेतल्याप्रमाणे आहे, अथवा खरे उत्तर काढायासाठीं, पहिल्या उत्तरांतून त्यांचा ७३ वा भाग वजा केला पाहिजे. दिवसाचा दर जर फार मोठा नसला, तर ७२ वा भागहि चालेल, आणि ७२ फार्दिंग हे १८ पेनी आहेत, ह्मणून दर ३८ पेनीस एक फार्दिंग वजा केल्याप्रमाणे, अथवा दर ३ शि०, यास  $\frac{1}{2}$  पेनी, अथवा दर ३ पौंडांस १० पे० याप्रमाणे वजा करणे हें बरोबर आहे. त्यावरून रीति पुढीलप्रमाणे आहे. वर्षाची सांगीतलेली रकम होण्यास दररोज काय दावे लागेल, हें जाणायासाठीं, सांगीतले रकमेतील शिलिंग इत्यादि यांस (२२१) प्रमाणे पौंडांचे दशांशरूप दे; त्यांतून त्यांचा तिसरा भाग वजा करून, बाकी राहिलेले पौंड, पेनी आहेत असे मनांत समजावे; नंतर त्यांत प्रत्येक १८ पेनीसाठीं १ फार्दिंग, अथवा प्रत्येक ३ पौंडांसाठीं १० पेनी वजा करावे. उदाहरण, दर वर्षास जर २२४ पौ० १४ शि० ०  $\frac{3}{4}$  पे० असतील, तर दर दिवसास काय होईल? हे २२४७०३ पौ० आहेत, आणि त्यांचा तृतीयांश ७४९०१ पौ० आहेत, हे २२४७०३ पौ० यांतून वजा केले, तर १४९८०२ पौ० बाकी राहातात, हे पेनी आहेत, तर ते १२ शि० ५८०२ पेनी होतात, ह्मणून यांत १ शि० ६ पे० किंवा १८ पेनी ८ वेळा जातात. याजकरितां ८ फार्दिंग अथवा २ पेनी वजा करून १२ शि० ३८०२ पे० हे राहातात, ह्मणजे एक फार्दिंगाचे  $\frac{1}{2}$  इतक्या अंतराने मात्र खरे उत्तराजवळ हें उत्तर होतें. या तऱ्हेने वर्षास १०० पौ० असले, तर दर दिवसास ५ शि० ५  $\frac{3}{4}$  पे० होतील.

२३२ आणि २३३ या कलमांतील कृती रुपयांवर या पुढीलप्रमाणें लागू होतात; दररोज अमुक रकम सांगितली तर एक वर्षांत एकंदर रकम किती होईल हें जाणाऱ्याची वारंवार गरज लागती. आतां १ रुपयांत १९२ पै आहेत, त्यांची दुप्पट ३८४ आहेत, ह्मणजे हे ३६५ पेक्षां १९ नीं अधिक आहेत, आणि १९२ चा दहावा अंश १९२ आहे. तर यावरून रीति याप्रमाणें आहे; दर दिवसास किती पै आहेत त्या काढून, त्यांची दुप्पट करून, त्या दुपटाचा २० वा भाग किंवा पहिल्याचा १० वा भाग त्यांतून वजा करून, बाकी रुपये आहेत असें समजून, वर्षाची जवळजवळ एकंदर रकम निघेल. बरोबरच रकम काढायासाठीं, एक दिवसाचे रकमेचा पंचमांश मिळीव.

उदाहरण. दर दिवसास १६० १०आ० ३पै० प्रमाणें एक वर्षाची किती एकंदर रकम होईल ?

$$\begin{array}{r}
 \text{रु०} \\
 १ \text{ रुपया दिवसास} - - - ३६५ \cdot ००० \\
 १०आ० ३पै० = १२३पै \\
 \text{तर, } १२३ \times २ - \frac{१२३}{१०} = २३३ \cdot ७०० \\
 \text{रु० } ५९८ \cdot ७०० \\
 \text{रु० आ० पै.} \\
 = ५९८ \quad ११ \quad २ \cdot ४ \\
 \frac{१}{५} \times १०आ० ३पै = \quad ० \quad २ \quad ० \cdot ६ \\
 \hline
 \text{हें उत्तर, रु० ५९८ - - १३ - - ३}
 \end{array}$$

वहिवाटीचे कामास चालेल अशी, पुढीलप्रमाणें वरचे रितीचे उलटी रीति काढितां येईल. ३६५ चें अर्ध १८२.५ आहे, ह्मणजे हें १९२ पेक्षां ९.५ इतक्यानें कमी आहे;

१८२.५ याचा २० भाग ९.१२५ आहे.

आणि त्याचा ५०० भाग ३६५ आहे.

९.४९०

तर रीति हीच आहे;

वर्षाचे प्राप्तीला, रुपये आणि रुपयांचें दशांश रूप देऊन, त्याचें अर्ध घे; नंतर या अर्धाला त्याचा २० वा आणि ५०० वा भाग मिळवून, पैचे रुपांत दिवसाचा दर  $\frac{1}{36500}$  इतक्या अंतरानें खरा येईल.

उदाहरण, वर्षाची प्राप्ती ६०० रुपये असली, तर दर दिवसाची किती प्राप्ती आहे ?

दरदिवसास १ रुपयाप्रमाणें वजा करून बाकी २३५ राहातात;

२३५ चें अर्ध - - - - - ११७.५ आहे

११७.५ यांचा २० वा अंश - - - - - ५.८७५ आहे

११७.५ यांचा ५०० वा अंश - - - - - ०.२३५ आहे

१२३.६१० पै.

१२३.६ पै = १० आ० - - ३.६ पै आहेत.

यावरून दिवसाचा दर, १ रु० १० आ० ३.६ पै आहे.

पुनः दिवसाचा दर सांगितला असतां, महिन्याची काय प्राप्ती होईल हें जाणयास इच्छिलें आहे असें मनांत आण.

रुपयांत १६ आणे आहेत, आणि त्यांची दुप्पट ३२ आहेत. यामुळे रीति याप्रमाणें आहे; दिवसाचे दराला आण्याचें आणि आण्याचे दशांशाचें रूप देऊन, त्याची दुप्पट कर; आणि हे रुपये आहेत असें मनांत आण. नंतर महिना ३० किंवा ३१ दिवसांचा असेल त्याप्रमाणें दोन किंवा एक दिवसाची प्राप्ती त्या रकमेतून वजा कर.

उदाहरण, दरदिवसास ७ आ० ५ पै प्रमाणें आगष्ट महिन्याची प्राप्ती किती होईल ?

आ० पै आ०

७ - - - ५ = ७.४१६६; यांची दुप्पट = १४.८३३

रु० आ० पै

= १४.८३३ रुपये = १४ - - १३ - - ४

यांतून एक दिवसाचा दर वजा कर. ७ - - ५

उत्तर. रुपये १४ . . ५ . . ११

जेव्हां दिवसाचा दर लहान आहे, तेव्हां माघ ही रीति उपयोगी पडेल.

उलटो पक्षाविषयीं ह्मणजे, महिन्याचे प्राप्तीपासून एक दिवसाची प्राप्ती काढण्याविषयीं ही पुढील रीति चालेल.

महिन्याचे प्राप्तीला रुपये आणि रुपयांचे दशांशांचें रूप दे, आणि महिन्याचे ३० किंवा ३१ दिवस असतील, तर महिन्याचे प्राप्तीस तिचा ३० वा किंवा ३१ वा भाग मिळवून ती बेरीज दोहोंनीं भाग, तो भागाकार आण्याचे रुपानें दिवसाची प्राप्ती होईल.

अथवा जापेक्षां  $\frac{1}{30}$  हा  $\frac{1}{31}$  यापेक्षां  $\frac{1}{६३०}$  इतक्यानें अधिक आहे, आणि हें अंतर  $\frac{1}{१०००}$  यांचें जवळ जवळ आहे; ; ह्मणून जर महिना ३१ दिवसांचा आहे, तर  $\frac{1}{30}$  मिळवून आणि  $\frac{1}{31}$  यांस मिळवून नये परंतु रकमेचा  $\frac{1}{१०००}$  वा भाग वजा केला असतां एक दिवसाची प्राप्ती निघेल. यांत  $\frac{1}{२४०००}$  इतकी मात्र सर्व रकमेवर चूक होईल.

उदाहरण, ३१ दिवसांचे महिन्याची २५ रुपये प्राप्ती असेल, तर एक दिवसाची किती किंमत होईल?

$$\text{पहिल्या रितीप्रमाणें, } २५ + \frac{२५}{३१} = २५.८०६४५$$

$$\text{यांचें अर्ध } = १२.९०३२ \text{ आणे}$$

$$\text{उत्तर, } \therefore १२ \text{ आ० } \therefore १०.८३८ \text{ पै;}$$

$$\text{दुसऱ्या रितीप्रमाणें, } २५ + \frac{२५}{३०} = २५.८३३३३$$

$$\text{यांचा } \frac{1}{१०००} \text{ वजा करून ह्मणजे } = \frac{०.२५८३}{२५.८०७५०}$$

$$\text{यांचें अर्ध } = १२.९०३७५ \text{ आणे.}$$

उत्तर, १२ आ० - - १०-८४५ पै, ह्मणजे, या आणि वरचे उत्तरांत पैचे एक शतांशापेक्षां अंतर कमी आहे, ह्मणून तें फारच थोडें आहे.

२३४. लांबीचीं मानें आणि क्षेत्रांचीं मानें यांमध्ये जो पुढें संबंध दाखविला आहे, तो भुमीतीशीं अंकगणिताचें संगतीकरण याचा आश्रय आहे. खालचे अबकड आकृतीस भुमीतींत काटकोनचौकोन ह्मणतात. मनांत आण कीं अब बाजू ६ इंच आणि अक बाजू ४ इंच अशी आहे.

	अ	ब	क	ड	ई	व	
फ							क्ष
ग		इ					य
ह							श
	क	ल	म	न	ओ	प	उ

अब आणि कड या दोन बाजूंची लांबी बरोबर आहे, तर त्या प्रत्येकीस, अ, ब, क, आणि ल, म, न इत्यादि बिंदूवर एक एक इंच लांबीचे सहा समभागांत विभाग; अक आणि बड या दोन रेघाहि परस्पर बरोबर आहेत, यांतून प्रत्येकीस फ, ग, ह, क्ष, य, आणि ञ या बिंदूवर एक एक इंच लांब अशा ४ समभागांत विभाग. अ, आणि ल, व आणि म, इत्यादि, आणि फ आणि क्ष इत्यादि सरळ रेघांनीं सांध. असें केल्यानें अबकड ही आकृति अनेक चौरसांत विभागिली असें होईल; कां कीं चौरस ह्मणजे काढकोन चौकोन जाचा सर्व बाजू बरोबर आहेत, आणि यामुळे अकड चौरस आहे. कां कीं अअ आणि अफ सारखेच लांबीचा आहेत, ह्मणजे, त्या दोहोंची लांबी १ इंच आहे. अशा चौरसांचा चार ओळी आहेत, आणि प्रत्येक ओळींत सहा चौरसें आहेत, ह्मणजे एकंदर  $६ \times ४$ , अथवा २४ चौरसें आहेत, त्या प्रत्येक चौरसाची बाजू एक इंच लांबीची आहे, आणि त्यांतल प्रत्येक चौरस (२१५) प्रमाणें एक चौरस इंच आहे असें ह्मणतात. तसेच कल्पनेनें, जर एक बाजूची लांबी ६ यार्ड आणि दुसरे बाजूची लांबी ४ यार्ड असती, तर त्या आकृतीचें क्षेत्र  $६ \times ४$ , किंवा २४ चौरस यार्ड होतें; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

२३५. आतां मनांत आण कीं अबकड याचा बाजूंत इंचांची कांहीं पूर्ण संख्या नाही, परंतु त्यांची लांबी कांहीं इंच आणि इंचाचे अपूर्णाक आहे.— उदाहरण, अबची लांबी  $३\frac{१}{२}$  इंच, अथवा (११४) प्रमाणें एक

अ ब ई

क	ड

फ ग

इंचाचे  $\frac{9}{2}$  श, आणि अक ची लांबी  $२\frac{1}{2}$  इंच, अथवा एक इंचाचे  $\frac{9}{2}$  आहे असें मनांत आण. अबचे दुप्पटीचे बरोबर अई रेघ कर, आणि अकचे लांबीचे चौपटीबरोबर अफ रेघ कर, नंतर अइफग काटकोनचौकोन पुरे कर. या आकृतीचे बाकीचे अवयवांविषयीं कांहीं सांगण्याचें प्रयोजन नाही. तर, जापेक्षां अबचे दुप्पट अई आहे, अथवा  $\frac{9}{2}$  इंचाचे दुप्पट आहे, ह्मणजे, अइची लांबी ७ इंच आहे; आणि जापेक्षां

अफची लांबीहि अकचे लांबीचे चौपट आहे, अथवा ४ वेळा  $\frac{9}{2}$  इंच आहे, ह्मणजे, अफची लांबी ९ इंच आहे. यामुळे अइफग या सर्व काटकोन चौकोनांत, (२३४) प्रमाणें,  $७ \times ९$  अथवा ६३ चौरस इंच आहेत. परंतु अइफग या काटकोनचौकोनांत आठ दुसरे काटकोनचौकोन आहेत, ते सर्व अबकड या आकृती सारिखे आहेत; आणि यामुळे अइफग याचा अबकड एक अष्टमांश आहे, ह्मणजे, अबकड यांत  $\frac{६३}{८}$  चौरस इंच आहेत. परंतु  $\frac{६३}{८}$  हे (११८) प्रमाणें  $\frac{९}{४}$  आणि  $\frac{९}{२}$  हे परस्पर गुणिल्यानें होतात. या आणि मागील कलमापासून असें दिसतें, कीं काटकोनचौकोनाचा बाजूंची लांबी पूर्ण इंच किंवा अपूर्ण इंच असली, तरी त्याचे बाजूंची लांबी जी इंचांची संख्या असेल, त्यांचे गुणाकारानें त्या क्षेत्रांतील चौरस इंचांची संख्या कळेल. चौरस ह्मणजे काटकोनचौकोन आहे, जाचा सर्व बाजू बरोबर आहेत, आणि यामुळे, त्याचे एक बाजूचे इंचांची संख्या तिणें तीच गुणिल्यानें चौरसाचे चौरस इंचांची संख्या कळेल. उदाहरण, जा चौरसाचे बाजूची लांबी १३ इंच आहे त्यांत  $१३ \times १३$ , अथवा १६९ चौ० इ. आहेत.

### २३६. अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

एक खोलीचा बाजू ४२ फु० ५ इंच आणि ३१ फु० ९ इंच आहेत, तर त्या खोलीचें क्षेत्र किती चौरस फुटी आणि चौरस इंच होईल! आणि त्या खोलीस बैठक करण्याकरितां वस्त्र  $\frac{3}{४}$  यार्ड रुंदीचें आहे, तेव्हां तें किती लांब घेतलें असतां पुरेल ?

उत्तर. १३४६ चौरस फुटी आणि १०५ चौरस

इंच खोलीचें क्षेत्र; आणि ५९८ फुटी,  $६\frac{५}{६}$  इंच इतक्या लांबीचें वस्त्र घेतलें पाहिजे.

एक काटकोनचौकोन शेताचा बाजू २५३ यार्ड आणि  $\frac{१}{४}$  मैल आहेत; तर त्यांत किती एकर आहेत ?

उत्तर. २३ एकर आहेत.

एक काटकोनचौकोन तळ्याची लांबी २०० काळ्या व रुंदी ८० काळ्या आहे, त्या तळ्याचें क्षेत्र किती चौरस बिघे होईल.

उत्तर. ४० बिघे.

१८ चौरस मैल आणि १८ मैल लांबीचें चौरस, अथवा १८ मैलांचें चौरस, या दोहोंत किती अंतर होईल ?

उत्तर. ३०६ चौरस मैल.

२३७. (२१४) कलमांतील मानांपासून (२१५) कलमांतील मानें या वरचे रितीने काढिलीं आहेत; कां कीं एक्ये फुटींत १२ इंच आहेत, ह्मणून १२×१२, अथवा १४४ चौरस इंच ह्मणजे एक चौरस फुट होतो हें उघड आहे, आणि याप्रमाणें पुढेहि. याचप्रमाणें एक घन अथवा काटकोनचौकोनभरीव,\* याचा जा तीन बाजू एका बिंदूंत मिळतात, त्यांचे लांबीचे इंच एकत्र गुणिल्याने त्या आकृतींत जे घन इंच असतात, ते कळतात. जसें ६ इंचांचे घनांत  $६ \times ६ \times ६$ , अथवा २१६ घन इंच आहेत; जा पेटीचा बाजू ६, ८, आणि ५ फुटी लांबीचा आहेत, तींत  $६ \times ८ \times ५$ , अथवा २४० घन फुटी आहेत. ह्मणून (२१४) कलमांतील लांबीचे मानांपासून (२१६) तील मानें याच रितीवरून काढिलीं आहेत.

\* काटकोनचौकोनभरीव ही आकृति इटचे आकृतीसारखी आहे, आणि घन काटकोन चौकोनभरीव आहे. परंतु त्याचा सर्व बाजू बरोबर आहेत. जसें रमळाचा फांसा.



## दुसरा भाग.

## त्रिराशि.

२३८. जर २२ यार्डांचें मोल १७६० ४आ० आहे, तर १५६ यार्डांचें मोल किती होईल? हें जाणायाची इच्छा आहे असें मनांत आण. १७६० ४आ० यांस आप्यांचें रूप दिलें असतां, २७६ आणि येतील; आणि जर २२ यार्डांचें मोल २७६ आणि आहे, तर एक यार्डाची किंमत  $\frac{२७६}{२२}$  आणि होईल. परंतु १५६ यार्डांचें मोल, एक यार्डाचे किंमतीचे १५६ पट आहे, यामुळें त्यांची किंमत  $\frac{२७६}{२२} \times १५६$  आणि, अथवा (११७) प्रमाणें  $\frac{२७६ \times १५६}{२२}$  आणि होईल. पुनः जर १२ $\frac{१}{२}$  शेरा गुळास ११ आणि पडतात, तर २० रु० ३आण्यांचा किती गूळ येईल? जापेक्षां १२ $\frac{१}{२}$  शेरांची किंमत ११ आणि आहे, तर दुप्पट शेरांस दुप्पट आणि पडतील, ह्मणजे २५ शेरांस २२ आणि पडतील, आणि २५ शेरांचा २२ वा भाग, अथवा  $\frac{२५}{२२}$  एक आण्यास येईल; परंतु २० रु० ३आणे यांत ३२३ आणि आहेत; आणि जापेक्षां एक आण्यास  $\frac{२५}{२२}$  शेरा येतात, तर ३२३ आण्यांस  $\frac{२५}{२२} \times ३२३$ , अथवा (११७) प्रमाणें  $\frac{२५ \times ३२३}{२२}$  शेरा गूळ येईल.

२३९. व्यवहारी गणितांत, जी रीति सर्व दुसऱ्या रितीपेक्षां अधिक कामास पडत्ये, आणि जा रितीनें वरचे सारिखे प्रश्न होतात, त्या रितीस त्रिराशि ह्मणतात, कां कीं तींत तीन परिमाणें दिलेलीं असतां, त्यांपासून चवथें परिमाण काढायाचें असतें. वरचे दोन उदाहरणांपासून ही पुढील रीति निघती, आणि त्याच कल्पनेप्रमाणें असें दिसेल, कीं ही रीति त्याच सारिखे सर्व दुसऱ्या पक्षांस लागू होईल.

वरचे दोन उदाहरणांत एक्ये जातीचीं दोन परिमाणें आहेत, आणि तिसरें परिमाण निराळ्ये जातीचें आहे, आणि उत्तर या तिसऱ्या परिमाणाचे जातीचें असावें, ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे. जसें, पहिल्या उदाहरणांत २२ यार्ड आणि १५६ यार्ड, आणि २७६ आणि आहेत आणि जे काढायाचें इच्छिलें आहे ते आण्यांची कांहीं संख्या आहे

दुसऱ्ये उदाहरणांत, ११ आणे आणि ३२३ आणे, आणि  $१२\frac{१}{२}$  शेर आहेत, आणि जें काढायाचें आहे तें शेरांची कांहीं संख्या आहे. हीं सांगीतलीं तीन परिमाणें एका ओळींत मांड, अशीं कीं जें परिमाण केवळ एक जातीचें आहे, तें उजवे शेवटाकडेस होईल, आणि या शेवटील परिमाणाचे संबंधाचें जें परिमाण आहे, तें डावेकडेस आरंभीं मांड.\* तिसरें परिमाण त्या दोहोंचे मध्ये मांड. पहिल्ये उदाहरणांत वेगळान्ये परिमाणांचा क्रम या पुढीलप्रमाणें होईल. जसें;

२२ यार्ड. १५६ यार्ड. १७ रु० ४ आ०

दुसऱ्ये उदाहरणांत तीं याप्रमाणें मांडिलीं जातील;

११ आ० २० रु ३ आ०  $१२\frac{१}{२}$  शे०

पहिल्ये आणि दुसऱ्ये परिमाणास एकरूप कर. जसें, दुसऱ्ये उदाहरणांत २० रु० ३ आणे यांस, (२१९) प्रमाणें आप्यांचें रूप दिलें पाहिजे. सोईस पडेल तर तिसरे परिमाणासहि दुसऱ्ये कोणखेहि नामाचें रूप देतां येईल; अथवा, जसें वरचे दुसऱ्ये उदाहरणाप्रमाणें, पहिलें आणि तिसरें परिमाण इच्छेस येईल त्या परिमाणानें गुणावें, आणि असा गुणाकार केल्यानें कांहीं फेर होत नाही, हें (२३८) आणि (१०८) कलमांतील उत्तरावरून दिसेल. दुसरें आणि तिसरें परिमाण परस्पर गुणून, तो गुणाकार पहिले परिमाणानें भाग. जो भागाकार येईल तो ओळीतील तिसरे परिमाणाचे जातीचा होईल, आणि तें इच्छिलें उत्तर होईल. जसें पहिल्ये उदाहरणाचें उत्तर (२३८) प्रमाणें  $\frac{२७६ \times १५६}{२२}$  आणे, अथवा  $\frac{१७५० \cdot ४ \text{ आ०} \times १५६}{२२}$  आहे.

\* उदाहरण सांगत्येसमयीं बहूनकरून पहिल्या आणि तिसऱ्या स्थळांचीं परिमाणें वाक्यांत जवळ जवळ असतात. परंतु कांहीं पक्षांत पहिल्या स्थळां कोणतें परिमाण मांडावें, हें शोधण्यास शिकणारास विचार करावा लागेल. (२३०) कलमांत जा कल्पना सांगितल्या आहेत, त्यांपासून वरचा गोष्ट कळेल. आतां पुढें जें लिहिलें आहे तें बहुधा उपयोगी पडेल. जा जातीचें उत्तर असावें त्या जातीचें जें दिलेलें परिमाण आहे, त्यापेक्षा उत्तर कमी असावें असें जर स्पष्ट दिसेल, तर तें दिलेलें परिमाण पहिल्या दोन परिमाणांतून, लहान परिमाणानें गुणावें; जर त्या परिमाणापेक्षा उत्तर अधिक असें असेल, तर त्यास मोठ्या परिमाणानें गुणावें; जसें पहिल्या उदाहरणांत २२ यार्डापेक्षा १५६ यार्डास अधिक किंमत पडेल असें स्पष्ट दिसतें, म्हणून एथें उत्तराचा जातीचे परिमाणास १५६ यांणीं गुणिलें पाहिजे.

२४०. पहिल्ये उदाहरणाची सर्व कृति या पुढीलप्रमाणे आहे.\*

यार्ड यार्ड रु० आ०

२२ १५६:: १७

१६

२७६

१५६

१६५६

१३८०

२७६

२२) ४३०५६ (१९५७ आणि  $\frac{२}{२२}$  अथवा  $\frac{१}{११}$ ;

२२

अथवा  $\frac{१२}{११} = १\frac{१}{११}$  पै

२१०

रु० आ० पै०

१९८

१२२ - - ५ - -  $१\frac{१}{११}$

१२५

११०

(२२८) प्रमाणें १५६

१५४

००२

१७ रु० - ४ आणि यांस आण्यांचें रूप न देतां या पुढील प्रमाणें कृति होईल.

\* वर दाखविल्याप्रमाणें वेगळाले परिमाणांचे मध्ये बिंदू मांडण्याची चाल आहे. या पुस्तकाचा आठवा भाग जास पुरतेपणीं समजला, त्यास त्वरेनें दिसेल, कीं त्रिराशीची रीति हो काहीं प्रमाणांतले तीन पदांपासून, चवथें पद काढण्याची कृति मात्र आहे.

यार्ड यार्ड रु० आ०

२२ : १५६ :: १७ . . ४

$$\begin{array}{r}
 \text{१५६} \quad (२२७) \\
 \hline
 २२) २६९१ . . ० (१२२ \text{ रु० } \cdot ५ \text{ आ० } \cdot १ \frac{१}{११} \text{ पै० } (२२८) \\
 \underline{२२} \\
 ४९ \\
 \underline{४४} \\
 ५१ \\
 \underline{४४} \\
 ७ \times १६ = ११२ \\
 \underline{११०} \\
 २ \times १२ = २४ \\
 \underline{२२} \\
 २
 \end{array}$$

कांहीं विशेष पक्षाला वरचा दोन रितींतून कोणती सोईस पडेल, हें शिकणारास अभ्यासानें कळेल, कां कीं याविषयीं कांहीं रीति सांगतां येत नाहीं.

२४१. तीन सांगीतलीं परिमाणें एकाच नावाचीं असतील असें कदाचित् घडेल; तथापि त्यांतून दोन एका जातीचीं, आणि तिसरें निराळ्ये जातीचें आहे असें दिसेल. उदाहरण, एक रुपयाचे मिळकतीस ४आ० ६पै० देणें पडतें, तर ४०० रुपयांचे मिळकतीस काय देणें पडेल ? या उदाहरणांत ४००रु०, ४आ० ६पै०, आणि १ रु० हीं तीन दिलेलीं परिमाणें नाण्याचे जातीचीं आहेत. तथापि, त्यांतून पहिलें आणि तिसरें परिमाण मिळकतीचे जातीचें आहे; दुसरें परिमाण देण्याचे जातीचें आहे; आणि उत्तरहि त्याच जातीचें इच्छिलें आहे, आणि यामुळें, (१५२) प्रमाणें तीं परिमाणें या पुढीलप्रमाणें मांडलीं पाहिजेत;

$$१ \text{ रु० } : ४०० \text{ रु० } :: ४ \text{ आ० } ६ \text{ पै० }$$

२४२. पुढें जीं उदाहरणें अभ्यासाकरितां दिलीं आहेत, त्यांस या रितीचा आश्रय आहे हें स्पष्ट दिसेल, अथवा स्पष्ट न दिसल्यास या रितीचा आश्रय आहे, हें कांहीं विचारानें दिसून येईल. ही रीति कशी लावावी याचा ठराव करण्यास कांहीं विचार करावा लागतो, अशीं पुष्कळ उदाहरणें आहेत.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

जर १० मण, ३० शेर साखरेस ५६ रूपये, ३ पावले, ४० रेस पडतात, तर १ खंडी, ४ मण, ५ शेरांस काय पडेल ?

उत्तर. १२७ रु० २ पा० ३२ रे  $\frac{३४}{४३}$ .

जर ३अ० २६मि० १२से० इतक्या वेळांत, एक घोडा १४ मै० ३फ० २७ या० चालतो, तर २३ मै० चालायास किती वेळ लागेल ?

उत्तर. ५अ० २९ मि० ३४ से०  $\frac{२४६२}{२५३२७}$ .

अ आणि ब अशा दोन पुरुषांचें दिवाळें निघालें, आणि दोघांचें कर्ज बरोबर आहे; दर पौंडास १५ शि०  $४\frac{१}{२}$  पे० प्रमाणें अ ला देण्याचें सामर्थ्य आहे, आणि ब ला केवळ ७ शि०  $६\frac{३}{४}$  पे० याप्रमाणें देण्याचें सामर्थ्य आहे. दिवाळें निघत्ये समयीं अचे जवळ ब पेशां १३०४ पौ० १७ शि० अधिक आहेत; तर प्रत्येकाचें कर्ज किती देणें आहे ?

उत्तर. ३३४० पौ० ८ शि०  $३\frac{३}{४}$  पे०  $\frac{१}{२५}$ .

एका प्रांतांतील दर १२  $\frac{१}{२}$  एकरांस, दुसऱ्ये प्रांतांत ५६  $\frac{१}{४}$  एकर आहेत. दुसऱ्ये प्रांतांत एकंदर १७३०० चौरस मैल आहेत. यावरून पहिले प्रांतांत एकंदर किती चौरस मैल असावे ? पुनः, पहिल्ये प्रांतांतील दर ३ मनुष्यांस, दुसऱ्ये प्रांतांतील ५ मनुष्य आहेत; आणि पहिल्ये प्रांतांतील २० एकर जमिनीवर २७ मनुष्ये रहातात असें मनांत आण, तर प्रत्येक प्रांतांत किती मनुष्ये असावीं ?

उत्तर. पहिल्ये प्रांतांत ३८४४  $\frac{४}{९}$  चौरस मैल आहेत, आणि त्यांत ३३२१६०० इतके लोक आहेत; आणि दुसऱ्ये प्रांतांत ५५३६००० इतके लोक आहेत.

जर १८ई० रुंदीचे ४२ $\frac{१}{२}$  यार्ड कापडास ५९ पै० १४शि० २पे० पडतात, तर १ यार्ड रुंदीचे ११८ $\frac{१}{४}$  यार्डास काय पडेल?

उत्तर. ३३२पै० ५शि० २ $\frac{४}{९}$ पे०

जर ९रु० ३आ० ६पै साहा आठवडे पर्यंत पुरतात, तर १००रु० किती वेळपर्यंत पुरतील?

उत्तर. ६५ $\frac{२५}{२१५}$  आठवडे.

दर औंसास १०पे० प्रमाणें २ह० चाहाचे बदलींत, दर पैंडास ९ $\frac{३}{४}$ पे० प्रमाणें दराची साखर किती घ्यावी लागेल?

उत्तर, ३२ह० ३का० ७पै० ३ $\frac{५}{३३}$ .

२४३. मनांत आण कीं हा पुढील प्रश्न केला आहे; ह्मणजे, जें काम ४५ मनुष्ये १० दिवसांत करितात, तें काम १५ मनुष्ये किती दिवसांत करतील? तर तें काम करण्यास ४५×१० अथवा ४५० दिवस एक मनुष्यास लागतील. आणि त्याच वेळेचे एक पंधरांश काळांत १५ मनुष्ये करतील, ह्मणजे  $\frac{४५०}{१५}$  अथवा ३० दिवसांत करतील, हें उघड आहे. ह्या आणि ह्या सारख्या दुसऱ्या कल्पनेवरून पुढील प्रश्न उलगडतां येतील.\*

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

जर १२ दिवसांत एक एकरांतील गवत १५ बैल खातात, तर १४ एकर खाण्यास २६ बैलांस किती दिवस लागतील?

उत्तर. ९६ $\frac{१२}{१३}$  दिवस.

जर ६ दिवसांत ५ फुट उंचीची भित २२ गंवडी करतील, तर १० फुटी उंचीची भित करण्यास ४३ गंवड्यांस किती दिवस लागतील?

उत्तर. ६ $\frac{६}{४३}$  दिवस.

२४४. जा प्रश्नसमुदायांचे उलगडण्यास दुहेरी त्रिराशि अथवा पंचराशि ह्मणतात, त्या जातीचीं वरचे कलमांत उदाहरणें आहेत, दुहेरी त्रिराशिकास खरें ह्मटलें असतां पंचराशिक ह्मणावें, कां कीं त्यांत पांच परिमाणें दिलेलीं असून, त्यांपासून साहावें परिमाण काढायाचें असतें. उदाहरण, जर ५ मनुष्ये ३० यार्ड वस्त्र ३ दिवसांत करितात,

तर ६८ यार्ड वस्त्र करण्यास ४ मनुष्यांस किती दिवस लागतील? एक मनुष्यास एक यार्ड वस्त्र करण्यास किती काळ लागेल तो पहिल्याने, प्रश्नाचे पहिल्या भागापासून काढावा. ५ मनुष्ये ३ दिवसांत जे कांहीं करितात, त्याचा एक पंचमांश एक मनुष्य ३ दिवसांत करील, ह्मणून तो ३ दिवसांत  $\frac{3}{5}$ , अथवा ६ यार्ड करील. यावरून तो एक यार्ड वस्त्र  $\frac{3}{5}$ , अथवा  $\frac{3 \times 4}{30}$  दिवसांत करील. यावरून ४ मनुष्यांस ६८ यार्ड वस्त्र करण्यास किती काळ लागेल तो काढावा, जापेक्षां एक मनुष्य एक दिवसाचे  $\frac{3 \times 4}{30}$  इतक्या दिवसांत एक यार्ड वस्त्र करितो, तर  $\frac{3 \times 4}{30} \times ६८$ , अथवा  $(११६)$  प्रमाणे  $\frac{३ \times ४ \times ६८}{३०}$  दिवसांत ६८ यार्ड करील; आणि ४ मनुष्ये तितकेंच काम एक चतुर्थांश वेळांत करतील; यावरून  $(१२३)$  प्रमाणे  $\frac{३ \times ४ \times ६८}{३० \times ४}$ , अथवा  $८\frac{१}{२}$  दिवसांत करतील.

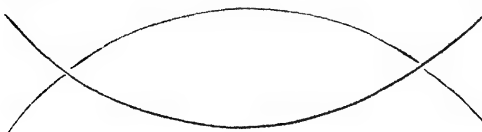
पुनः या पुढीलप्रमाणे प्रश्न केल्यास, ह्मणजे जर ५ मनुष्ये ३० यार्ड वस्त्र ३ दिवसांत करितात, तर ६ मनुष्ये १२ दिवसांत किती यार्ड वस्त्र करतील? एथें एक मनुष्य एक दिवसांत किती करील तें काढावें, मागल्ये उदाहरणाप्रमाणे  $\frac{३०}{३ \times ५}$  इतके यार्ड करील असें दिसतें. यावरून ६ मनुष्ये एक दिवसांत  $\frac{६ \times ३०}{३ \times ५}$  यार्ड करतील, आणि १२ दिवसांत  $\frac{१२ \times ६ \times ३०}{३ \times ५}$ , अथवा १४४ यार्ड करतील.

या उदाहरणापासून खालची रीति निघती. दिलेलीं परिमाणें दोन ओळींत लिही, असीं कीं एक जातीचीं परिमाणें एकाखालीं एक येतील, आणि जीं परिमाणें परस्परांशीं संबंध ठेवितात तीं एक ओळींत मांडावीं; परंतु या संकेतानें कीं जें परिमाण क्रियेचें फळ दाखवितें, तें पहिल्ये ओळींत मध्यें असावें. वर दिलेल्ये दोन उदाहरणांचीं परिमाणें या पुढीलप्रमाणे लिहिलीं पाहिजेत;

५ मनुष्ये.

३० यार्ड.

३ दिवस.



४ मनुष्ये.

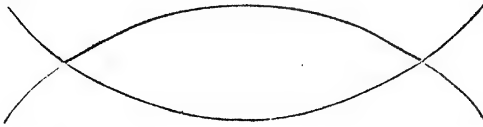
६८ यार्ड.

## दुसरें उदाहरण.

५ मनुष्यें.

३० यार्ड.

३ दिवस.



५ मनुष्यें.

१२ दिवस.

एक ओळीचा मध्य आणि दुसऱ्ये ओळीचे शेवट यांतून एक बांक-डी रेघ काढ. तर एका रेघेत तीन परिमाणें येतील, आणि दुसरीत दोन येतील. नंतर तीन परिमाणांचे गुणाकारास, दोन परिमाणांचे गुणाकारानें भाग, जो भागाकार येईल तें उत्तर होईल.

(२३८) कलमांतील त्रैराशिकाचे रितीप्रमाणें, प्रत्येक ओळींतील परिमाणास (२१९) प्रमाणें गरज असल्यास सरळ रूप द्यावें.

## अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

६ घोडे २ दिवसांत १७ एकर जमीन नांगरतात, तर ९३ घोडे ४ $\frac{१}{२}$  दिवसांत किती एकर नांगरतील ?

उत्तर. ५९२ $\frac{७}{८}$  एकर.

२० मनुष्यें ३ $\frac{१}{४}$  दिवसांत ७ काटकोनचौकोन शेतें खणितात, त्या प्रत्येकाचा बाजू ४० आणि ५० यार्ड आहेत, तर ९० आणि १२५ $\frac{१}{२}$  यार्ड अशा बाजूंचीं ५३ शेतें ३७ मनुष्यें किती दिवसांत खणतील ?

उत्तर. ७५ $\frac{२४५१}{२०७२०}$  दिवस.

जर ६० हन्डे २० मैल नेण्यास १४ पै० १० शि० पडतात, तर ५ पै० ८ शि० ९ पे० इतक्याने ३० मैल पर्यंत किती ओझें जाईल ?

उत्तर. १५ हन्डे०

१०० रु० यांस एक वर्षाला ५ रु० नफा मिळतो, तर ८५० रु० पर्यास ३ वर्षे आणि ८ महिने यांत किती नफा मिळेल ?

उत्तर. १५५ रु० १३ आ० ४ पै



## तिसरा भाग.

व्याज, इत्यादि.

२४५. मागील लिहिलेल्या कित्येक उदाहरणांप्रमाणे, कांहीं पै-  
क्याचा अपूर्णांक कसा काढावा, इतकीच कृति मात्र या भागांतील सर्व  
उदाहरणांत येती. मनांत आण, कीं १६ रु० चे ४० भागांतून ७  
भाग घेण्याचे आहेत, ह्मणजे १६रु० यांस ४० भागांत विभागून त्यां-  
तून ७ भाग घेण्याचे आहेत. प्रत्येक भाग  $\frac{१६}{४०}$  रु० आहे, आणि तसे  
७ भाग  $\frac{१६}{४०} \times ७$ , अथवा (११६)प्रमाणे  $\frac{१६ \times ७}{४०}$  रुपये. ही कृति या पुढील-  
प्रमाणे होईल.

$$\begin{array}{r}
 \text{रु०} \\
 १६ \\
 \underline{७} \\
 ४०) ११२ ( २\text{रु०} \dots १२\text{आ०} \dots ९\frac{३}{४}\text{पै} \\
 \underline{८०} \\
 ३२ \\
 \underline{१६} \\
 ५१२ \\
 \underline{४०} \\
 ११२ \\
 \underline{८०} \\
 ३२ \\
 \underline{१२} \\
 ३८४ \\
 \underline{३६०} \\
 ४
 \end{array}$$

५६पै० १३शि०  $७\frac{३}{४}$  पे० यांचे १०० भागांतून १३ भाग घ्याव  
याचे आहेत, असे मनांत आण.

पौ० शि० पे०

५६ . . १३ . . ७ $\frac{१}{२}$

१३

१००) ७३६ . . १७ . . १ $\frac{१}{२}$  ( ७पौ० ७शि० ४ $\frac{१}{४}$ पे $\frac{४१}{५०}$

७००

३६ × २० + १७ = ७३७

७००

३७ × १२ + १ = ४४५

४००

४५ × ४ + २ = १८२

१००

८२

३६०, १२आ० यांचे शंभर भागांतून, २ $\frac{१}{२}$  भाग ध्यावयाचे आहेत, तर वरचे रितीवरून उत्तर  $\frac{३६०१२आ० \times २\frac{१}{२}}{१००}$  आहेत, अथवा (१२३) प्रमाणे  $\frac{३६०१२आ० \times ५}{२००}$  ह्यातून शंभरांतून २ $\frac{१}{२}$  भाग काढणे, आणि २०० तून ५ भाग काढणे, हीं दोन्ही एकच आहेत.

अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

१६० ८आ० यांचे ५३ भागांतून ७ $\frac{१}{३}$  भाग घे.

उत्तर. ३आ० ३ $\frac{४५}{५३}$ पै.

१०७६०, १३आ०, ४पै यांचे शंभर भागांतून ५ भाग घे.

उत्तर. ५६० ६आ० ३ $\frac{१}{५}$ पै.

५६पौ० ३शि० २पे० हे ३२ पुरुषांस वांटले आहेत. तर २३ जणांचा भाग, बाकी राहिलेल्या पुरुषांचा भागांतून किती अधिक आहे?

उत्तर. २४पौ०, ११शि०, ४ $\frac{१}{२}$ पे $\frac{१}{२}$ .

२४६. दोन रकमा असतील, तर दुसऱ्या रकमेचे शंभर भाग करून त्यांतून पहिली रकम होण्यासाठी किती भाग घेतले पाहिजेत, असे व्यवहारांत ह्मणत नाही, परंतु एक रकम दुसऱ्या रकमेचा कोणता अपूर्णाक आहे असे ह्मणतात. जसे ३३६० ४आ० यांचे अर्ध १६६० १०आ० आहे असे ह्मणत नाही, परंतु दुसरी रकम पहिलीचे दशक-

ड्यास ५० प्रमाणें आहे असें झणतात. जसें ५ रुपये हे २०० रुपयांचे दर शेंकड्यास  $2\frac{1}{2}$  आहेत, जर २०० रुपयांस शंभर भागांत विभागिले, तर त्या भागांतले  $2\frac{1}{2}$  भाग ५० आहेत. पुनः १३० हे ८०, १०आ०, ८पै यांचा दरशेंकड्यास १५० आहेत, कां कीं दुसरी रकम आणि तिचें अर्ध मिळून पहिली रकम होती. कांहीं रकमेचे ५६ भागांतून २३ भाग घेतले असतां दरशेंकड्यास काय पडेल ! असें विचारिलें आहे ; तर याचा अर्थ याप्रमाणें होतो ; कीं जाजवळ ५६ रुपये आहेत, त्यास जर १०० रुपये मिळतात, तर जाजवळ २३ रुपये आहेत, त्यास काय मिळेल ! (२३८) प्रमाणें  $\frac{23 \times 100}{56}$  ४०, अथवा  $\frac{2300}{56}$ , अथवा  $81\frac{1}{4}$  रुपये होतात. यावरून ५६ तून २३ हे दरशेंकडा  $81\frac{1}{4}$  प्रमाणें आहेत.

त्याच प्रमाणें १८ भागांतून १६ भाग, हे दर शेंकडा  $\frac{16 \times 100}{18}$ , अथवा  $88\frac{1}{3}$  आहेत, आणि ५ भागांतून २ भाग, हे दर शेंकडा  $\frac{2 \times 100}{5}$  अथवा ४० आहेत.

यापासून दुसऱ्ये अपूर्णाकांस शेंकड्याचा दर कसा काढावा याची रीति स्पष्ट कळेल.

१२० ३आ० यांतून ६० १२आ० २पै हे शेंकड्याचा काय दरानें आहेत, हें विचारिलें असें मनांत आण. जापेक्षां पहिल्या रकमेत २३४० पै आहेत, आणि दुसऱ्ये रकमेत १२९८ पै आहेत, यावरून पहिलीचे २३४० भागांतून १२९८ भाग दुसरी रकम आहे; झणजे, मागील रीती प्रमाणें हे  $\frac{129800}{2340}$ , अथवा  $55\frac{1100}{2340}$ , अथवा  $55\frac{11}{234}$  ७आ० ६पै० शेंकड्याचे जवळजवळ दरानें आहेत. आणे इत्यादि-कांस रुपयांचे दशांशाचें रूप दिल्यानं वरची कृति त्वरेनें होईल. तीन दशांशस्थळें घेतलीं असतां शेंकड्याचा दर, आण्यापर्यंत जवळ निघेल, आणि व्यवहारांत जापेक्षां अधिक गरज लागत नाहीं. जसें मागील उदाहरण घेतलें, झणजे १२९८७५ ० यांतून  $6\frac{1}{2}$  ६० हे शेंकड्यास काय दरानें आहेत, असें जाणायास इच्छिलें तर,  $6\frac{1}{2} \times 100$  हे ६७६ आहेत, यांस १२९८७५ यांणीं भागिलें तर  $55\frac{1}{2}$  ४६६ ० अथवा  $55\frac{1}{2}$  ७आ० होतात. पुरवणींत दाखविल्याप्रमाणें केवळ खरें उत्तर काढितां येईल

## अभ्यासाकरिता उदाहरणे.

२३३ भागांतून १९८ $\frac{१}{४}$  ह्यांचा शेंकडा दर काय आहे ?

उत्तर. ८५पै० १शि० ८ $\frac{३}{४}$  पे०, अथवा ८५६० १आ० ४पै  
१९३६० १२आ० इतक्या किमतीचे काहीं सामान घेऊन २१६६०  
१३आ० ४पै इतक्यास विकलें; तर दरशेंकड्यास काय नफा होईल ?

उत्तर. ११६० १४आ० ७पै पेशां काहीं कमी.

बचा माल अने विकून दिला, त्याचे २३०६० १२आ० मिळाले,  
आणि त्यास दरशेंकड्यास ३ प्रमाणें दलाली कबूल केली आहे; तर  
अला किती \*दलाली मिळावी ?

उत्तर. ६६० १४आ० ९पै०

१७००६० चा माल दलाल विकत घेतो, आणि त्यावर दलाली  
दरशेंकड्यास  $\frac{१}{४}$ ६० कबूल केली आहे, तर त्यास सर्व दलाली किती  
मिलेल ?

उत्तर. २६० २आ०

एक गलबताची किंमत १५४२३ पै० आहे, आणि त्याचे विम्या-  
साठी दर शेंकड्यास १९ $\frac{३}{४}$  पै० देणें पडतें, तर सर्व किती द्यावें लागेल ?

उत्तर. ३०३३पै० ३शि० ९ $\frac{१}{२}$ पे० $\frac{३}{४}$

२४७. कोणी सावकाराचें दिवाळें निघाल्यावर, त्याचे कर्जदारांस  
देण्याचें जें त्यास सामर्थ्य असतें, तें दाखवायासाठी, विशेषेंकरून दर रूप-  
यास किती आणे सामर्थ्य आहे असें ह्मणतात. जसें कोणी सावकाराचें

\*जर एक सावकार दुसऱ्या सावकारासाठी माल विकत घेतो, किंवा विकून देतो, तर  
त्यास काहीं नेमलेलें द्रव्य द्यावें लागतें, त्यास दलाली ह्मणतात, आणि ही दलाली सर्व रकमा-  
विषयीं बहुतकरून दर शेंकड्यास नेमलेली असते.

कर्ज १००६० आहे, आणि त्यास केवळ ५० देण्याचें सामर्थ्य आहे, तर तो दर रुपयास ८ आणे देतो असें ह्मणतात. (२४६) कलमांप्रमाणें याविषयींची रीति सोईने निघेल. उदाहरण ८२६० यांतून ५०६० हे १रुपयाचे  $\frac{५०}{८२}$  ६० आहेत, अथवा दर रुपयास  $\frac{५० \times १६}{८२}$  आणे, अथवा ९आ० ९पै  $\frac{३}{४१}$  आहेत.

२४८. कांहीं पैक्याचे उपयोगासाठीं जो पैका द्यावा लागतो, त्यास व्याज ह्मणतात, आणि त्याचा दर नेहेमी १०० वर असतो. दरवर्षास किंवा, सहा महिन्यांस, किंवा तीन महिन्यांस, किंवा दुसरे कांहीं मुदतीप्रमाणें व्याज भरावें लागतें; परंतु दरशेंकड्यास ४ असें नुसतें ह्मटलें, तर तो दर एक वर्षाचा आहे; ह्मणजे १०० रुपयांचे उपभोगासाठीं प्रतिवर्षी ४रुपये द्यावे लागतील.

जी रकम कर्जी देतात, तीस मुद्दल ह्मणतात, आणि तिजवर व्याज दोन जातींचें असतें. कराराप्रमाणें जा वेळेस व्याज द्यावयाचें आहे, तें तत्क्षणीं जर कर्ज घेणारा भरतो, तर प्रतिवर्षीं त्यास तितकें भरावें लागेल हें स्पष्ट आहे; आणि जें व्याज त्यास कांहीं वर्षांनंतर भरावें लागेल तें, एक वर्षाचे व्याजास तितक्ये वर्षांचे संख्येने गुणिलें असतां निघेल. परंतु जर तो एकदांच व्याज चुकवून देत नाही, आणि मुद्दल परत देईपावेतो आपल्या जवळ ठेवितो, तर कर्ज देणाराचा पैका त्याचे हातीं प्रतिवर्षीं अधिक होत जाईल, आणि असा करार झाला, तर त्याचे देण्याचे समयावर जितका अधिक वेळ गेला, तर त्याचे प्रत्येक वर्षाचे व्याजाचें व्याज द्यावें लागेल. वरचे पहिल्ये पक्षांतल्ये व्याजास सरळ व्याज ह्मणतात, आणि दुसऱ्ये पक्षाचे व्याजास चक्रवाढ व्याज ह्मणतात. व्याज आणि मुद्दल मिळून रकमेस एकंदर रास ह्मणतात.

२४९. दर शेंकड्यास  $४\frac{१}{२}$  प्रमाणें  $६\frac{१}{३}$  वर्षांत १०४९६० १२आ० ३पै यांचें सरळ व्याज किती होईल? सांगितल्या रकमेचें एक वर्षाचें व्याज  $६\frac{१}{३}$  वेळां बरोबर सगळें व्याज आहे; ह्मणजे ती रकम  $४\frac{१}{२}$  यांणीं गुणून, तो गुणाकार १०० यांणीं भागून एक वर्षाचें व्याज कळेल. कृति याप्रमाणें आहे;

रु० आ० पै.  
(२३०) प्रमाणें (अ) १०४९.१२.३

अ×४ ४१९९. १.०  
अ× $\frac{१}{२}$  ५२४. १४.  $\frac{१}{२}$

(८२) प्रमाणें. १००) ४७,२३०.१५०.  $\frac{१}{२}$  (४७रु० ३आ० ९पै  $\frac{१७}{१००}$

१६

३,८३\*

१२.

९,९७\*

(ब) रु० ४७००३०९  $\frac{१७}{१००}$  हैं एक वर्षाचें व्याज आहे.

ब×६ २८३००. ६०.११.  $\frac{५२}{१००}$   
ब× $\frac{१}{३}$  १५००११०११  $\frac{३२}{१००}$

रु० २९९००. २००.१०  $\frac{८४}{१००}$  हैं  $\frac{६१}{३}$  वर्षाचें व्याज आहे.

### अभ्यासाकरिता उदाहरणें.

दर शेंकड्यास ३ प्रमाणें १९ वर्षे आणि ७ आठवडे यांचें १०५ रु० ६ आ० २ पै यांचें व्याज काय होईल; यांत एक वर्षाचे ५२ आठवडे आहेत असें मानावें?

उत्तर. ६० रु० ७ आ० ११ पै. जवळ जवळ.

दर शेंकड्यास ३ प्रमाणें ७ वर्षांचें, आणि दर शेंकड्यास  $२\frac{१}{२}$  प्रमाणें ८ वर्षांचें ५० पौ० १९ शि० यांचे व्याजांत किती अंतर आहे?

उत्तर. १० शि०  $२\frac{१}{२}$  पे०

दर शेंकड्यास ५ प्रमाणें १ वर्षांत १५७ पौ० १७ शि० ६ पे० यांचें व्याज काय आहे?

उत्तर. ७ पौ० . . १७ शि० . . १०  $\frac{१}{२}$  पे०

दर शेंकड्यास ४ प्रमाणें ९ वर्षांत, आणि दर शेंकड्यास ९ प्रमाणें ४ वर्षांत कोणत्याही मुदलाचें व्याज एकच आहे हें दाखीव?

\* एथें भाग्यातील १५ आ० घेतले आहेत.

\* एथें भाग्यातील १ पै घेतली आहे.

२५०. चक्रवादीने कोणत्येहि रकमेचें व्याज काढायाकरितां, प्रत्येक वर्षाचे शेवटीं मुद्दल आणि व्याज मिळून, एकंदर रकम काढिली पाहिजे. कां की या पक्षांत (२४८) प्रमाणें पहिल्ये वर्षाचे शेवटीं, मुद्दल आणि व्याज मिळून एकंदर रकमेवर, दुसऱ्ये वर्षांत व्याज चालू होतें. उदाहरण, दरशेंकड्यास ५ प्रमाणें चक्रवाढ व्याजानें १०० रुपयांचें व्याज काढायाचें आहे, असें मनांत आण. कृति पुढीलप्रमाणें आहे ;

	रु०
पहिलें मुद्दल . . . . .	१००
पहिल्ये वर्षाचें व्याज . . . . .	५
पहिल्ये वर्षाची एकंदर रकम .	१०५
(२४९) प्रमाणें १०५ रु० चें व्याज दुसऱ्ये वर्षाचें	५.४
दुसऱ्ये वर्षाचे शेवटीं एकंदर रकम	११०.४
तिसरे वर्षाचें व्याज . . . . .	५.८२३
तिसऱ्ये वर्षाचे शेवटीं एकंदर रकम	११५.१२.२३
पहिलें मुद्दल . . . . .	१००.००.०
तीन वर्षांचे व्याजाची प्राप्ती	११५.१२.२३

वर्षे पुष्कळ असतील, आणि रकम मोठी असेल, तर असें करण्याची रीति फार श्रमाची आहे; यामुळे व्याजाचे अनेक दरांवरून अनेक वर्षांची एक रुपयाची एकंदर रकम दाखविण्यासाठीं कोष्टक केलेले असतात. वर सांगितल्ये उदाहरणाविषयीं असे कोष्टक कामांत आणण्याचे असतील, तर जा ओळीचे वरल्ये आंगास दर शेंकड्यास ५ असें मांडिलें असेल तें पहा; आणि जा कोष्टकाचे वरल्ये आंगास वर्षांची संख्या असें मांडिलें असेल, त्या ओळींत ३ या संख्येचे समोर ११५७६२५ हे दिसतील; ह्मणजे त्यांचा अर्थ हाच, कीं ३ वर्षांत त्या दराप्रमाणें १ रु० याची एकंदर रास ११५७६२५ रु० इतकी होती. आतां १०० हे त्याचे शंभरपट आहेत; आणि (२४९) प्रमाणें ११५७६२५ × १०० = ११५७६२५ आहेत; परंतु (२२१) प्रमाणें हे ११५ रु० १२ आ० २ पै आहेत; यामुळे १०० रुपयांची एकंदर रास वरप्रमाणें ११५ रु० १२ आ० २ पै० आहे.

२५१. सरळ व्याजानें दरशेंकड्यास ५ प्रमाणें ४ वर्षांपावेतों, कांहींएक मुद्दल राहिलें आहे, आणि त्यासमयीं व्याजसुद्धां रकम ३५०६० झाली असें मनांत आण; तर आरंभीं मुद्दल काय होतें, हें जाणायाज्जी, इच्छा आहे. जें कांहीं आरंभीं मुद्दल होतें, तें शंभर भागांत विभागून त्यांतील व्याजाकरितां ५ भाग ४ वर्षांपावेतों प्रत्येक वर्षांत मिळविले असावे; ह्मणजे मूळचे मुद्दलांत असे २० भाग मिळविल्याने ३५०६० ही रकम झाली असावी. यामुळे, जर ३५०६० यांत १२० भागांत विभागिलें, तर त्यांतील १०० भाग इच्छिलेलें मुद्दल आहे, आणि बाकीचे २० भाग व्याज आहे; ह्मणजे  $\frac{350 \times 100}{120}$  २९१६० १० आ० ८ पै० हें इच्छिलें मुद्दल आहे.

२५२. मनांत आण, कीं ४ वर्षांनंतर अने, बला ३५०६० देण्याचे कबूल केले होते, आणि नंतर परस्परांचा असा करार झाला कीं तें कर्ज सद्यः द्यावें; आणि सरळ व्याजानें दरशेंकड्यास ५ प्रमाणें व्याज मिळतें; यावरून ३५०६० ही सगळी रकम अ नें देऊं नये, दिली असतां, अला ४ वर्षांचे व्याजाचा तोटा होईल, आणि बला तितका नफा होईल. यामुळे, अ याणें बला व्याजासुद्धां जी ४ वर्षांत ३५०६० एकंदर रकम होईल, इतकें मात्र सद्यः देणें द्यावें. यामुळे पैका वेळेचे पूर्वी चुकवून देण्यासाठीं कर्जांतून ५८६० ५ आ० ४ पै० कमी केले पाहिजेत. या रकमेस कटमुद्दत ह्मणतात; आणि दर शेंकड्यास कटमितीचा भाव ५ असला तर ३५०६० चार वर्षांनंतर देण्याचे, त्यांची सांप्रत किंमत २९१६० १० आ० ८ पै० आहे असें ह्मणतात. पैक्याचे कोणत्याहि रकमेची सांप्रत किंमत काढण्याची रीति (२५१) वरून या पुढीलप्रमाणें आहे; सांगितली रकम १०० यांणीं गुणून आणि तो गुणाकार, १००, आणि कटमुद्दतीचा दर आणि वर्षे यांचा गुणाकार या दोहोंचा बेरीजेनें भाग. जर कर्जाचे मुद्दतींत, वर्षे आणि महिने, अथवा केवळ महिनेच असतील, तर महिन्यांस वर्षांचें अपूर्णांकरूप दिलें पाहिजे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

दरशेंकड्यास कटमुद्दतीचा भाव  $8\frac{1}{2}$  आहे, तर दोन वर्षांचे मुद्दतीचे १३८६० १४ आ० ४ पै० अशे हुंडीची कटमुद्दत काय होईल?  
उत्तर, ११६० ७ आ० ६ पै०



दरशेकड्यास व्याजाचा भाव ३ असेल, तर ६ महिन्याचे मुदतीचे १०३१पै० १७शि० यांची सांप्रत किंमत काय आहे ?

उत्तर. १०१६पै० १२शि०

२५३. अने गुणायाचें असतां, अ+व किंवा अ-व यांणीं गुणिलें, तर गुणाकाराचें  $\frac{व}{अ+व}$ , अथवा  $\frac{व}{अ-व}$  या अपूर्णांका इतकी चूक पडेल; कां कीं पहिल्येपक्षांत उत्तर अधिक येईल, आणि दुसऱ्येपक्षां कमी येईल. पुनः अने भागावयाचें असतां जर अ+व यांणीं भागिलें, तर भागाकाराचें  $\frac{व}{अ}$  या अपूर्णांकाइतकें उत्तर कमी येईल; आणि जर अने भागण्याबद्दल अ-व याणें भागिलें, तर भागाकाराचें  $\frac{व}{अ}$  या अपूर्णांकाइतकें उत्तर अधिक येईल. जसे, १७ यांणीं भागण्याचे बद्दल २० यांणीं भागिलें, तर भागाकाराचें  $\frac{३}{१७}$  इतकें उत्तर कमी येईल; आणि जर ३६५ यांणीं भागण्याचे बद्दल ३६० यांणीं भागिलें, तर भागाकाराचें  $\frac{५}{३६०}$ , अथवा  $\frac{१}{७२}$  इतकें उत्तर अधिक येईल.

वर्षाचे कांहीं भागाचे कांहीं रकमेचें व्याज काढायाची इच्छा असेल, आणि जर कोष्टकाचें सहाय्य नसेल, तर वर्षांत ३६० इतकेच दिवस आहेत, अशी कल्पना सोईस पडेल, ह्मणजे अशे पक्षांत ३६० यांस ३६५ चे जागीं घेण्यासाठीं, उत्तरांतून ३६० दिवसांचा ७२ वा भाग किंवा बहुत करून ७२ वा भाग वजा केला पाहिजे. ३६० या संख्येस इतके भाजक आहेत, कीं (२३०) प्रमाणें वरावर दीची रीति नेहमी सहज लावितां येईल. जसे, दरवर्षास व्याज १८०० एआ० १०पै, अथवा १८६१४५०० पडतात, तर २७४ दिवसांचा भाग काय होईल ?

एक वर्षाचें व्याज . . . . १८६१४५००

सांगितले दिवस २७४

१८० हे ३६० चें अर्ध आहे. ९३०७२

९४

९० हे १८० चें अर्ध आहे. ४६५३६

४ हे ३६० चा  $\frac{१}{९०}$  आहे. २०६८

९) १४१६७६

८) १५७४१

१९६७

उत्तर.  $१३ \cdot ९७०९६० = १३६० \ १५$  आ० ६पै.

परंतु जर उत्तर अगदि जवळ पाहिजे, तर सांगितल्ये दिवसांचे दोन दशांश हे गुणक करावे आणि ७३ भाजक करावे ही रीति बरी; कां कीं  $म \div ३६५$  हे  $२म \div ७३०$ , किंवा  $\frac{२}{१०}म \div ७३$ . जसें, बरचे उदाहरणांत,  $५४ \cdot ८$  यांणीं गुणितात आणि ७३ नीं भागितात; आणि  $५४ \cdot ८ \times १८ = ९८४५ = १०२० \cdot ०७४६$ , यांस ७३ यांणीं भागून  $१३ \cdot ९७३६$  होतात, हे बरचांचे जवळजवळ आहेत, ह्मणजे त्यांपासून  $१३६० \ १५$  आ० ७पै होतात, हे खरे होण्यास एक पै पावेतो जवळ जवळ येतात.

२५४. तीन मनुष्यांस  $१००६०$  विभागून द्यावयाचे आहेत, असे कीं त्यांचे वांटे ६, ५, ९ या प्रमाणांत होतील; ह्मणजे पहिल्या पुरुषाचे प्रत्येक ६६० चे भागाविषयीं दुसऱ्यास ५६० आणि तिसऱ्यास ९६० मिळतील.  $१००६०$  यांस जर  $६+५+९$  किंवा  $२०$  भागांत विभागिले, तर त्या भागांतून ६ भाग पहिल्या पुरुषास, ५ दुसऱ्यास, आणि ९ तिसऱ्यास असे वांटे केले पाहिजेत हें स्पष्ट आहे. यामुळे (२४५) प्रमाणें यांचे वेगळाले वांटे पुढीलप्रमाणें आहेत,  $\frac{१०० \times ६}{२०} = ६०$ ,  $\frac{१०० \times ५}{२०} = ५०$ , आणि  $\frac{१०० \times ९}{२०} = ४५$ , अथवा  $३०६०$ ,  $२५६०$ , आणि  $४५६०$  आहेत.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

चार पुरुषांस  $३९४६० \ १२$  आ० विभागून दे, असे कीं त्यांचे वांटे १, ६, ७ आणि १८ या प्रमाणांत होतील.

उत्तर.  $१२६० \ ५$  आ०  $४ \frac{१}{२}$  पै,  $७४६० \ ०$  आ०  $३$  पै,  $८६६० \ ५$  आ०  $७ \frac{१}{२}$  पै,  $२२२६० \ ०$  आ०  $९$  पै.

सहा पुरुषांस  $२०$  पै० विभागून दे, असे प्रमाणानें कीं प्रत्येकाचा वांटा त्याचे पूर्वीचे सर्व पुरुषांचे वाट्यांचे बेरिजे बरोबर होईल.

उत्तर, पहिल्या दोन पुरुषांतून प्रत्येकाचा वांटा  $१२$  शि०  $६$  पे० होईल; तिसऱ्याचा वांटा  $१$  पै०  $५$  शि०; चवथ्याचा वांटा  $२$  पै०  $१०$  शि०; पांचव्याचा  $५$  पै०; आणि सहाव्याचा  $१०$  पै० असे वांटे होतील.

२५५. दोन किंवा अनेक पुरुष सर्कती असून जर कांहीं पैक्याचा

व्यापार करितात, आणि जर त्या सर्वांनी सारिखाच रकम भरिली नसली, तर त्यांचे एकंदर रकमेपासून कांहीं प्राप्ती, किंवा तोटा आला असता, तो सर्वांस सारिखाच वांटून द्यावा हें योग्य नाहीं. उदाहरण, मनांत आण, कीं बचे दुप्पट अपैका भरितो, आणि त्यांचे एकंदर जमेपासून १५५० नफा होतो, तर अला व पेक्षां दुप्पट नफा असावा; ह्यणजे जर सगळी प्राप्ती तीन भागांत विभागिली, तर त्यांतून दोन भाग अला आणि एक भाग बला असावा, अथवा अचा नफा १०५० आणि बचा नफा ५५० होईल. मनांत आण कीं, अ, ब, आणि क हे तीन पुरुष कांहीं उदिमांत सर्कती आहेत, आणि अ २५०५०, ब १३०५०, आणि क ४५५०, अशा वेगळाल्या रकमा भरितात. त्यांचे एकंदर जमेपासून १०००५०, प्राप्ती होये. तर ही प्राप्ती त्या तीन पुरुषांस कशे प्रमाणानें वांटून द्यावी? यावरून एक मनुष्यास १५० वर जितका नफा मिळतो, तितकाच नफा दुसऱ्यास १५० वर मिळाला पाहिजे. आतां, जापेक्षां सर्कतींची एकंदर बेरीज २५०+१३०+४५, अथवा ४२५५० आहे, आणि त्यांपासून १०००५० प्राप्ती झाली आहे, तर प्रत्येक रुपयावरची प्राप्ती  $\frac{1000}{425}$  ५० होईल. यामुळे अचा नफा  $\frac{1000 \times 250}{425}$  रुपये, बचा नफा  $\frac{1000 \times 130}{425}$  ५०, आणि कचा नफा  $\frac{1000 \times 45}{425}$  ५०, अशी वांटणी होईल. या मूळ कारणावरून, (२४५) कलमाचे कृतीप्रमाणें, या पुढील प्रश्नाचें उत्तर निघेल.

एका जहाजाचा विमा करावयाचा आहे, त्या जहाजांत अचा भाग १९२८५० आहे, आणि बचा भाग ४९६३५० आहे. विम्याविषयी ४७४५० १० आ. २ पै, देण्याचे आहेत. तर त्या प्रत्येकास विम्याविषयी काय भाग द्यावा लागेल?

उत्तर. अला १३२ ५० १२ आ. ८ पै० द्यावे लागतील.

अ, ब, आणि क अशा तीन पुरुषांनीं १४९ पै० चा तोटा भरावाचा आहे. जर प्राप्ती झाली असती, तर बचे प्राप्तीचे चौपटी बरोबर अची प्राप्ती असती, आणि अ आणि ब या दोघांचे प्राप्ती बरोबर कची प्राप्ती आहे. यावरून प्रत्येकानें कशा प्रमाणानें तोटा वांटून घ्यावा?

उत्तर. अने ५९ पै० १२ शि०, बने १४ पै० १८ शि०, कने ७४ पै० १० शि० याप्रमाणें तोटा भरावा.

२५६. कित्येक वेगळाले पुरुष आपआपल्या रकमा अनेक वेगळाले

मुदतीपर्यंत सरकतींत ठेवितात. अशे पक्षांत, त्यांचे कोहीं विशेष करार नसतील, तर जी रकम जितके अधिक मुदतीपर्यंत कामांत राहिल, तितका तिजवर अधिक नफा किंवा तोटा असावा. उदाहरण, अ आणि ब असे दोन पुरुष जर एकच कामाकरितां सारिखेंच मुद्दल भरतात, परंतु अ चा पैका बचे पैक्याचे दुप्पट मुदत पर्यंत कामांत राहिला, तर अचा नफा बचे नफ्याचे दुप्पट असावा. याचें मूळ कारण हेंच आहे, कीं १ रु० एक महिना, किंवा एक वर्ष पर्यंत कामांत आणला असतां, प्रत्येकास प्राप्ती बरोबर व्हावी. उदाहरण, मनांत आण कीं, अ ६ महिनेपर्यंत ३ रु० सरकतींत ठेवितो, ब ७ महिने पर्यंत ४ रु० ठेवितो, आणि क २ महिने पर्यंत १२ रु० ठेवितो, नंतर त्यांस १०० रु० प्राप्ती होत्ये; तर प्रत्येकास त्यांतून काय काय मिळवें? आतां जापेक्षां अ सहा महिने पावेतो ३ रु० सरकतींत ठेवितो, झणून केवळ १ महिना ठेविल्यानें जें मिलणार, त्याचे सहा पट प्राप्ती असावी; झणजे ६×३ रु०, अथवा १८ रु० केवळ एक महिना ठेविल्या इतकीच प्राप्ती मिळेल; पुनः बला ४×७ रु०, अथवा २८ रु० केवळ एक महिना ठेविल्या इतकीच प्राप्ती मिळेल; आणि कला १२×२ रु०, अथवा २४ केवळ एक महिना ठेविल्या, इतकीच प्राप्ती मिळेल. यामुळे १०० रु० यांस जर ६×३+४×७+१२×२, अथवा ७० भागांत विभागीले, तर त्या भागांतून अला, ६×३, अथवा १८, बला ४×७, अथवा २८, आणि कला १२×२ अथवा २४ असे भाग असावे. यावरून त्या तीन पुरुषांचा वांटण्या या पुढीलप्रमाणें आहेत,  $\frac{६ \times ३ \times १००}{६ \times ३ + ४ \times ७ + १२ \times २}$  रु०,  $\frac{४ \times ७ \times १००}{६ \times ३ + ४ \times ७ + १२ \times २}$  रु०, आणि  $\frac{१२ \times २ \times १००}{६ \times ३ + ४ \times ७ + १२ \times २}$  रु०.

### अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

अ, ब, आणि क हे तीन पुरुष सरकती आहेत; त्यांत २ वर्षे अ ३ रु० ६ आ० ठेवितो, एकवर्ष ब १०० रु० ठेवितो, आणि क  $१\frac{१}{२}$  वर्षपर्यंत १२ रु० ठेवितो. त्यांचे एकंदर जमेवर ४२७६ रु० ७ आ० प्राप्ती होत्ये, ही तिघांस कशी वांटून द्यावी ?

उत्तर. अला २३१ रु० ६ आ० ३ पै; बला ३४२ रु० ० आ० ० पै;

कला ६१७ रु० ० आ० ८ पै.

दरवर्षास १५० पै० प्रमाणें २ वर्षेपर्यंत अ, ब, आणि क, या तिघांनीं एक घर भाड्याने घेतलें. त्यांत अ शेवटपर्यंत राहातो, ब १६ महिने राहातो, आणि ब राहाण्याचे समयांत क ४ $\frac{१}{२}$  महिने राहातो. तर भाड्याविषयीं प्रत्येकानें काय काय द्यावे?\*

उत्तर. अचा भाग १९० पै० १२ शि० ६ पे०, बचा भाग ९० पै० १२ शि० ६ पे०, आणि कचा १८ पै० १५ शि० याप्रमाणें द्यावे.

२५७. व्यवहारास गणित लावण्याचा जा रितीचा भागांत सांगीतल्या त्याच मुख्य आहेत. दुसऱ्या रिती आहेत खऱ्या, परंतु वर सांगितलेलीं मूळ कारणें मनांत पक्की ठेविलीं, तर त्या रिती वर सांगितल्या रितीं मध्ये येतात असे स्पष्ट दिसेल. तशाच तऱ्हेचा हुंडणावळीचा रिती आहेत, त्या या पुढील सारिल्या प्रश्नास लागू होतात; जर, २० शि० ची किंमत या देशांत १० $\frac{१}{२}$  रु० असेल, तर १६० पै० ची किंमत किती होईल? स्पष्ट आहे, कीं हें त्रिराशीचे रितीपासून कळेल. व्यवहार कामांत वर सांगितल्या रिती बहुतकरून फार उपयोगी पडतात; आणि त्या शिकणारास पक्क्या समजल्या, तर त्यांचा योगानें व्यवहारांतील बहुतकरून कोणताहि प्रश्न त्यापुढें आला असतां, त्याचे समजुतीचे बाहेर राहील असे त्याणें भय धरूं नये. परंतु पुढें जो धंदा रोजगार त्यास करावा लागेल, त्याजविषयींचा योग्य रिती, त्यास त्याचे त्याचे वेगळाल्या विशेष कामांचा बरोबरच या पुस्तकांत किंवा दुसऱ्या कोणत्याहि पुस्तकांत मिळतील असा भरवसा शिकणारानें धरूं नये. वाणी, सावकार, किराणेवाला, कापडकरी, कुळंबी, आणि दलाल, या सर्वांचे सोईविषयीं एकच तऱ्हेचा रिती आहेत असें नाहीं; परंतु या पुस्तकांत जीं मूळ कारणें सांगितलीं आहेत, त्यांशीं जो पुरुष पक्का माहित होईल, तो आपल्या पुढील गरजेविषयीं विचार करून कसे करावे याविषयीं सामर्थ्यवान होईल, अथवा, जा तऱ्हेनें, त्याचे पूर्वजांनी आपल्या अडचणीं दूर केल्या त्यांचा रिती शिकणाराचे मनांत तरेनें येतील.

\* पहिल्यानें पाहिलें असतां हें उदाहरण या रितीचें नाहीं. हें उदाहरण करण्याविषयींची योग्य कृति जो पहिल्यानें नजरेस येईल ती खोटी आहे, असें काहीं विचार केल्यानें दिसून येईल.

## पुरवणी.

### पहिला भाग.

#### गणन करण्याचे रितीविषयी.

या पुस्तकांत जा रिती मागें सांगितल्या, त्या व्यवहार चालीप्रमाणें आहेत, आणि जीं उदाहरणें सांगितलीं, तीं चालीप्रमाणें केलेलीं आहेत. परंतु त्वरित गणित करितां यावें अशी शिकणाराची इच्छा असेल, त्याणें या पुरवणींत जा रिती सांगितल्या आहेत, त्याप्रमाणें खचित् चालावें; ह्मणजे तें केलून त्यास श्रम कमी पडतील इतकेंच नाहीं, परंतु त्यास त्वरेनें आणि खरेपणानें गणन करण्याची संवई होईल.

**पहिल्यानें.** अंकसंख्या लेखनवाचन क्रमांत मूलचा दशक संख्या, जसें, १०, १००, १०००, इत्यादि आहेत, त्यांतून प्रत्येकास एक या अंकाचे स्थानावरून लक्षांत आणूं नको, परंतु त्यावर जितकी शून्ये येतात त्यावरून तो अंक लक्षांत ठेव. जसें दहा ही एक शून्यांची संख्या, शंभर ही दोन शून्यांची संख्या, दशलक्ष ही सहा शून्यांची संख्या, इत्यादि आहे असें ह्मण. कोणत्याहि संख्येचे उजव्याकडून पांच अंकस्थळें वेगळीं केलीं, तर बाकी राहिलेले अंक लक्षांचे आहेत; कां की १००००० ही पांच शून्यांची संख्या आहे. दशक, शतक, सहस्र, दशसहस्र, लक्ष, कोटी, इत्यादिकांस १, २, ३, ४, ५, ६, इत्यादि शून्यांवरून ध्यानांत धरायास शीक. सत्रा शून्यांची संख्या काय आहे? सत्रांमध्ये प्रत्येक सहा स्थळांस दशलक्ष ह्मण, आणि बाकी राहिल्ये पांचांस लक्ष ह्मण; ह्मणजे ती संख्या लक्षाचे दशलक्षाचे दशलक्ष आहे हें उत्तर आहे, अथवा परार्थ इतकी संख्या आहे. कोणत्याहि संख्येचे उजव्याकडून बारा अंकस्थळें वेगळीं केलीं, तर बाकी राहिलेली संख्या काय आहे? उत्तर बाकी राहिलेल्ये संख्येमध्ये जितके एक आहेत, तितके त्या संख्येत दशलक्षांचे दशलक्ष, अथवा दशखर्व इतकी संख्या आहे.

**दुसऱ्यानें.** १, २, ३, ४ इत्यादि, अथवा ३०, २९, २८, २७, इत्यादि

असे उलटसुलट रितीनें जलद अंक मोजतां आल्यानंतर, एक, दोन, तीन, इत्यादि ९ पावेतो अंक सोडीत सोडीत कोणखेहि अंकापासून प्रारंभ करून मोजायास शिकावें. जसे, ४ या अंकापासून आरंभ करून ७ चें अंतर ठेऊन ४, ११, १८, २५, ३२, इत्यादि याप्रमाणें मोजायास शिकावें, आणि १, २, ३, ४, इत्यादि हे जसे जलद बोलतां येतात, तसे वरचे अंक जलद बोलतां यावे; ह्मणजे, त्या अंकांचा उच्चार करण्यांत कांहीं वेळ जाऊं देऊं नये. मिळवणीची कृति कांहीं सहाय्यावांचून मनांत करण्याची संवई असावी; ४ आणि ७ मिळून ११ आहेत, ११ आणि ७ मिळून १८ आहेत, इत्यादि असें ह्मणूं नये; परंतु ४, ११, १८ असें ह्मणावें. आणि पुढें जितकें सहज मोजतां येतें तितकें मार्गेहि सहज मोजतां यावें, याची बहुतकरून जरीं गरज नाहीं तथापि तसें मोजतां यावें, हें बरें आहे; ह्मणजे ६० या अंकापासून ७ अंतरानें उलटें ६०, ५३, ४६, ३९ इत्यादि मोजावें.

**तिसऱ्यानें.** एक अंकस्थळाचा दोन संख्या पहातांच, त्यांतून लहान संख्या मोठीचे बरोबर करायास तिशीं कोणता अंक मिळविला पाहिजे हें शोधून काढायास शिकावें. ८ तून ३ जाऊन ५ राहिले असें न ह्मणतां, ३ आणि ८ हे अंक पहातांच त्यांचें अंतर ५ आहे असें अभ्यासानें मनांत यावें. आणि त्या दोन संख्यांतून दुसरी लहान असेल, तर ८ पासून पुढील्ये जा संख्येचे शेवटीं ३ येतात, ती संख्या काढण्याचा अभ्यास ठेवावा, ह्मणजे ती संख्या १३ आहे, आणि १३ तून ८ वजा करून बाकी ५ पांच रहातात असें न ह्मणतां, ८ यांस जे ५ मिळवावे लागतात त्यांवर लक्ष पोंचावें. अंकांची एक ओळ घे, जसें,

४ २ ६ ० ५ ० १ ८ ६ ४

यांतून कोणताहि एक अंक आणि त्याचे जवळचा दुसरा अंक घेऊन, त्यांजवर वरची रीति लावावी, परंतु या सोपे उदाहरणांत मोठे अंक बोलून दाखविण्याची गरज नाहीं. जसें, पहिला अंक ४ आणि दुसरा अंक २ असे घेतले, तर ४ चे पुढें जा अंकाचे शेवटीं २ येतात तो अंक १२ आहे, त्यांत ४ वजा केले तर ८ बाकी रहातात, याप्रमाणें ४ आणि ८, २ आणि ४, ६ आणि ४, ० आणि ५, ५ आणि ५, ० आणि १, १ आणि ७, ८ आणि ८, ६ आणि ८, अशी कृति करावी.

**चवथ्यानें.** दोन स्थळांची एक संख्या आणि एक स्थळाची एक

संख्या अशा दोन संख्यांशीं मागीलप्रमाणे अभ्यास करावा. जसे २७ आणि ६ यांस पहातांच, २७ पासून पुढे जा अंकाचे शेवटी ६ येतात, ह्मणजे ३६ पावेतो पुढे चालवें, जा ९ संख्यांतून पुढे जावें लागतें तो अंक मनांत धरून, २७ आणि ९ हे ३६ आहेत इतकें मात्र ह्मणवें. जसे, १७७२९६३८१०९ या अंकांचे ओळीपासून अभ्यासकरितां हीं उदाहरणें निघतात; १७ आणि ० हे १७ आहेत; ७७ आणि ५ हे ८२ आहेत; ७२ आणि ७ हे ७९ आहेत; २९ आणि ७ हे ३६; ९६ आणि ७ हे १०३; ६३ आणि ५ हे ६८; ३८ आणि ३ हे ४१; ८१ आणि ९ हे ९०; १० आणि ९ हे १९ आहेत.

**पांचव्यानें.** दोन अंक स्थळांचे संख्यांतून, एकचा अंक मांडून दहचा अंक ध्यानांत धरण्याची संवई करावी. जसें वरचे उदाहरणांत, उत्तरांतील एकचा अंक मांडतेसमयीं दहचा अंक मोठ्यानीं ह्मणून लक्षांत ठेवावा.

**सहाव्यानें.** गुणाकार कोष्टक असा पाठ करावा कीं दोन अंक पहातांच त्यांचा गुणाकार मनांत यावा; ह्मणजे, ८ आणि ७, अथवा ७ आणि ८, हे अंक पाहिले असतां ७ वेळा ८ हे ५६ होतात, असें न ह्मणतां ५६ मनांत यावे. जसें, ३९७०६५४८ या अंकांचे ओळीकडे पाहून, प्रत्येक जवळ जवळचे अंकांचा गुणाकार, ते अंक वाचतांच करण्याची संवई करावी, जसें, २७, ६३, ०, ०, ३०, २०, ३२.

**सातव्यानें.** वरची उदाहरणें शिकल्यानंतर, तीन अंक पहातांच, कांहीं तोंडानें कृति न करितां, त्यांतून पहिल्या दोहोंचा गुणाकारास तिसरा अंक मिळवण्याची संवई करावी. जसें, ३, ८, ४, हे अंक पाहिले असतां, ३ वेळा ८ हे २४, आणि ४ मिळून २८ होतात, असें न ह्मणतां ३ वेळा ८ आणि ४, अथवा २८ होतात, असें सांगतां येई असा अभ्यास करावा. जसें, १७९२३६४०८ यांपासून हीं पुढील उदाहरणें निघतात, १६, ६५, २१, १२, २२, २४, ८.

**आठव्यानें.** आतां वरची कृति या पुढीलप्रमाणें अधिक कर; २, ७, ६, ९, असे ४ अंक पहातांच, वर सांगीलयाप्रमाणें, कांहीं शब्द न बोलतां, पहिल्या दोन अंकांचे गुणाकारास तिसरा अंक मिळीव; नंतर ती सर्व रकम सांगून तीस बाकीचा चवथा अंक मिळवून बेरीज सांग, आणि सांगतेसमयीं दशकावर जोर घालून उच्चार कर. जसें, २, ७,



६, ९, यांपासून २० आणि ९ हे २९ आहेत, असे लक्षांत आले पाहिजे. ७७३६९८९७४ या अंकांचे ओळीपासून ही पुढील उदाहरणे निघतात, ५२ आणि ६ हे ५८; २७ आणि ९ हे ३६; २७ आणि ८ हे ३५; ६२ आणि ९ हे ७१; ८१ आणि ७ हे ८८; ७९ आणि ४ हे ८३ आहेत.

**नवव्यानें.** २, ४, ७, ९, असे चार अंक पहातांच, मागील उदाहरणांत या पुढीलप्रमाणें फेरफार करावा; पहिला आणि दुसरा यांचा गुणाकार तिसऱ्यानें वाढवून तो मनांत धरावा; नंतर त्यांत चवथा अंक मिळवून नये, परंतु वजा करावा, ह्मणजे, चौथ्या कलमाचे अभ्यासाचे उदाहरणाप्रमाणें, जा अंकाचे शेवटीं चवथा येतो, तेथपावेतो पुढें चालवें. जसें, २, ४, ७, ९, यांपासून याप्रमाणें सुचना होत्ये, ह्मणजे, १५ आणि ४ मिळून १९ आहेत. १७२३९६८९२९ या अंकांचे ओळीपासून ही पुढील उदाहरणे निघतात, ह्मणजे, ९ आणि ४ हे १३; १७ आणि २ हे १९; १५ आणि १ हे १६; ३३ आणि ५ हे ३८; ६२ आणि ७ हे ६९; ५७ आणि ५ हे ६२; ७४ आणि ५ हे ७९ आहेत.

**दहाव्यानें.** कोणताहि सांगीतला एक दोन अंकस्थळांचे संख्येंत किती वेळा जाऊन बाकी काय राहिल, हें वरें काढायास शिकावें. जसें, ८ आणि ५३ यांस पहातांच, ६ वेळा आणि बाकी ५ असे वरें ह्मणावें. अशा कामांत निपूण व्हावयासाठीं सरळ लहान भागाकाराची उदाहरणे उपयोगी पडतात. जसें, २३६४१०७९२ यांस ७ यांणी भागिल्यानें, अथवा

$$\begin{array}{r} 33762970 \\ 336810792 \\ \hline \end{array}, \text{ बाकी } २.$$

यांत इतकें मात्र ह्मणावें लागतें, ह्मणजे ३ आणि २; ३ आणि ५; ७ आणि ५; ७ आणि २; २ आणि ६; ९ आणि ४; ७ आणि ०; ० आणि २.

वेगवेगळ्या रितींची कृति करिते समर्थी या पुढीलप्रमाणें करावें;

**मिळवणी.** या पुढील कृतीमध्ये अंकांशिवाय तोंडाने कांहीं बोलू नये; जा अंकावर एक चिन्ह आहे, त्यास मात्र मांडावा; जा अंकावर

दोन चिन्हें आहेत तो हातचा घ्यावा; परंतु इतके हातचे घेतले असें ह्मणूं नये.

४७९६३ ६, १५, १७, २३, ३१, ३'४'; ११, १२, २१, २२,  
१५९८  
२६३१६ ३१, ३'७'; ९, १७, २४, २७, ३२, ४'१';  
५४७९२  
८१९ १०, १४, २०, २१, २'८'; ७, ९, १'३';  
६६८६

१३८१७४

मिळवणीचा ताळा करायासाठीं, वरची ओळ सोडून बाकीचे ओळींची बेरीज घेऊन, ती बेरीज सोडिलेल्या ओळीशीं मिळवावी, अशी चाल आहे, परंतु त्यापेक्षां प्रत्येक उभी ओळ खालून वर, वरून खालीं असें करून ताळा पहावा हें बरें.

**वजाबाकी.** याविषयीं ही पुढील कृति पुरेल. जे हातचे घ्यावे लागतात, तो नेहेमीं एक आहे, ह्मणून तो बोलण्याचें प्रयोजन नाहीं. ७९४३६२५८१९० यांतून. ८ आणि २', ४ आणि ५', ७ आणि ४', ५८६४५९६२७३८ हे वजा कर. ३ आणि ५', ६ आणि ९', १० आणि २', २०७९०२९५४५२ ६ आणि ०', ४ आणि ९', ७ आणि ७', ९ आणि ०', ५ आणि २'. आतां ८ आणि २ हे १० होतात असें ह्मणण्याचें प्रयोजन नाहीं; कां कीं २ आले असें समजल्यावर, ते कोठून आले हें लक्षांत ठेवण्याचें प्रयोजन नाहीं.

**गुणाकार.** करितेसमयीं हे पुढील शब्द मात्र बोलावे लागतात; नंतर चालीप्रमाणें बेरीज घ्यावी. जा अंकावर चिन्हें नाहींत ते हातचे घेतात.

६७०३८३

९८७६

४०२२२९८	१८', ४९', २२', २', ४२', ४'०'
४६९२६८१	२१', ५८', २६', २', ४९', ४'६'
५३६३०६४	२४', ६६', ३०', ३', ५६', ५'३'
६०३३४४७	२७', ७४', ३४', ३', ६३', ६'०'.
६६२०७०२५०८	

गुणाकाराची प्रत्येक ओळ आणि उत्तराची ओळ यांतून ९ टाकून, पुरवणीचे दुसऱ्ये भागाप्रमाणें ताला पहा.

जास वरचें आठवें कलम चांगलें माहित आहे, त्यास कृति करितानां एक गुणाकाराची ओळ तिचे वरचे ओळीस सहज मिळवितां येईल, जसे ;

६७०३८३

९८७६

४०२२२९८ ८; २१ आणि ९ हे ३०'; ५९ आणि २ हे ६१';  
५०९४९१०८ २७ आणि २ हे २९'; २ आणि २ हे ४';  
५८७२५५५०८ ४९ आणि ० हे ४९'; ४६ आणि ४ हे ५'०' आहेत.  
६६२०७०२५०८

दुसरी ओळ उत्पन्न करण्याची सर्व कृति उजव्ये बाजूवर करून दाखविली आहे, आणि त्यापासून ७६ यांचा गुणाकार पुरा होतो, त्याचप्रमाणें तिसऱ्ये ओळीपासून ८७६ यांचा गुणाकार पुरा होतो, आणि चवथीपासून ९८७६ यांचा गुणाकार पुरा होतो.

**भागाकार.** वर सांगितलेल्ये नवव्ये कलमाचे सहाय्यानें, प्रत्येक गुणाकार आणि त्याचे पुढील वजाबाकी एकदांच या पुढीलप्रमाणें कर ;

२७६९३) ४४१९७२८०९६६२ ( १५९५९७३०

१६५०४२

२६५७७८

१६५४१०

२६९४५९

२०२२२६

८३७५६

६७७२

गुणक ५ असून १६५०४२ यांपासून २६५७७ हे उत्पन्न होतात; तेव्हां, १५ आणि ७ हे २'२; ४७ आणि ७ हे ५'४; ३५ आणि ५ हे ४'०; ३९ आणि ६ हे ४'५; १४ आणि २ हे १६ इतके मात्र शब्द बोलावे लागतात.

वर्गमूळ काढण्याची कृति करितेसमयीं, आणि पुरवणीचा पुढील ११ व्या भागांतील समीकरणें उलगडतेसमयीं, या संक्षेप भागाकारा-प्रमाणें कृति केली पाहिजे.

## पुरवणी दुसरा भाग.

नऊ आणि अकरा टाकून ताळा पहाण्याविषयीं.

हिशोबाचा ताळा पहाण्यासाठीं, नव्या शिकणारानें नऊ टाकण्याचे कृतीशीं माहित होण्यासाठीं अभ्यास केला पाहिजे. ही कृति पुरती नाहीं, कां कीं जर एक अंक कमी केला आणि तितक्यानेंच दुसरा अंक अधिक केला, तर अशी दुहेरी चूक व्यापासून सांपडणार नाहीं; परंतु अशी दुहेरी चूक पडत नाहीं, यावरून ती रीति खरी आहे असा मुद्दा होतो.

या रितीचा आश्रय या पुढील प्रतीक्षेवर आहे; अ, ब, क, ड, या चार संख्या असतील, अशा कीं,

$$अ = बक + ड,$$

आणि दुसरी एक संख्या म असेल, आणि जर अ, ब, क, ड, हे वेगळाले मनें भागून त्यांचा वेगळाल्या बाक्या, प, क, र, स, असतील तर

$$प आणि कर + स$$

यांस मनें भागिल्यानें सारिखीच बाकी निघेल, आणि कदाचित् त्या परस्पर बरोबरहि असतील.

$$\text{उदाहरण. } ३३४ = १७ \times १९ + ११;$$

या चार संख्या ७ नीं भागून, ५, ३, ५, आणि ४, अशा वेगळाल्या बाक्या रहातात. नंतर ५ आणि ५  $\times$  ३ + ४, अथवा ५ आणि १९ या दोहोंस ७ नीं भागून दोहोंचा बाक्या ५ होतील.

यामुळे कृतीचा खरेपणा ताडून पहाण्यासाठीं भाजकाविषयीं, कोणतीहि संख्या कामांत घ्यावी. कामास उपयोगी पडे असा ताळा प-

हाक्यासाठी, जापासून बाकी सोईने काढितां येईल असा भाजक घ्यावा. ३, ९, आणि ११ या संख्या सोईचे भाजक आहेत, आणि त्यांतून ९ बाकीचापेक्षा अधिक उपयोगी आहे.

३ आणि ९ या दोन संख्यांनीं भागून जी बाकी निघती, ती नेहमीं त्यां संख्येचे अंक स्थळांचे बेरिजेस, याच दोन अंकांनीं भागून जी बाकी निघती, तिचे बरोबर असती. उदाहरण, २४६१२०३७७ यांस ९ नीं भागून बाकी काय राहिल? या संख्येचे अंकस्थळांची बेरीज  $२+४+६+१+२+०+३+७+७$ , अथवा ३२ आहे, ह्मणजे, त्यापासून बाकी ५ रहातात. परंतु बेरीज करितेसमयीं तींतून जसे जसे ९ निघतात, तसे तसे खरेनें ते टाकून द्यावे ही सोईची रीति आहे. जसे याप्रमाणें ह्मण, २, ६, १२, ३, ४, ६, ९, ७, १४, आणि बाकी ५. तर २४६१२०३७७ यांस ९ नीं भागिलें असतां वरप्रमाणें बाकी ५ रहातात. ताळा या पुढीलप्रमाणें होईल; स्पष्ट आहे कीं, १, १०, १००, इत्यादि या प्रत्येक संख्येस ९ नीं भागून बाकी १ राहिल, कां कीं त्या संख्या १, ९+१, ९९+१, इत्यादि अशा आहेत. यामुळें, २, २०, २००, इत्यादि प्रत्येकीची बाकी २ आहे; ३, ३०, ३०० इत्यादि प्रत्येकीची बाकी ३ आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. ह्मणजे, जर १७६४ यांस ९ नीं भागिलें, तर १००० हे कित्येक बरोबर नवांचा संख्यांत एक अधिक इतके होतील, ७०० यापासून ७ अधिक होतील, आणि ६० पासून ६ अधिक होतील. तर अशांनें, १, ७, ६, ४, हे एकत्र मिळवून त्यांतून ९ टाकून जी बाकी राहिल, ती १७६४ यांस नवांनीं भागून जी बाकी राहिल, तिचे बरोबर आहे.

ही कृति आतां गुणाकारास लावून दाखवितों; यापूर्वी (६६) व्ये कलमांत असें सांगितलें कीं

$$१०००४५६९ \times ३१६३ = ३१६४४४५१७४७ \text{ आहेत.}$$

डाव्येकडील पहिल्ये संख्येंतून नऊ टाकतानां, याप्रमाणें मात्र ह्मटलें पाहिजे, १, ५, १०, १, ७; दुसऱ्यांत ३, ४, १०, १, ४; तिसऱ्यांत ३, ४, १०, १, ५, ९, ४, ९, ८, १२, ३, १०, १. यावरून ७, ४, आणि १, ह्या बाक्या आहेत. आतां  $७ \times ४ = २८$  यांतून नऊ टाकून १ रहातो; ह्मणजे ही बाकी, आणि गुणाकाराची बाकी, सारिखीच आहे.

पुनः (८४) कलमांत, असें सांगितलें आहे, कीं

$$२३७९६४८४ = १३०००० \times १८३ + ६४८४.$$

आतां १३००००, १८३, आणि ६४८४, या प्रत्येकांतून नऊ टाकिले असतां ४,३, आणि ४, अशा बाक्या रहातात. आतां  $४ \times ३ + ४$  यांतून नऊ टाकिले, तर ७ बाकी रहातात; ह्मणजे, २३७९६४८४ यांतून नऊ टाकून बाकी ७ पूर्वीचे बरोबरच आहेत.

समीकरणाचे एके बाजूचे कृतीचें फळ, दुसऱ्ये बाजूचे फळाशीं ता-डायासाठीं, समीकरणाचे एके बाजूचें फळ, स्मरणांत ठेवणें, किंवा मांडणें हे श्रम चुकविण्यासाठीं, या पुढीलप्रमाणें केलें पाहिजे; समीकरणाचा बाजूस दोन किंवा अधिक संख्या असतील, त्यांची बाकी काढून ती बाकी नवांतून वजा करून, ती बाकी समीकरणाचे दुसरे बाजूस एक संख्या आहे, त्यांत मिळीव. नंतर त्या बाजूची बाकी ० होईल. जसें, वरचे समीकरणाचे उजव्ये बाजूंतून जी ७ बाकी निघाली, ती नवांतून वजा करून बाकी २ आहेत, ते दुसऱ्ये बाजूचे एके संख्येचे आरंभीं हातचे घेऊन, याप्रमाणें ह्मण; २, ४, ७, १४, ५, ११, २, ६, १४, ५, ९, ०.

नऊ त्वरेनें टाकायास शिकणारा अभ्यासानें निपूण होईल.

नवांवरची बाकी खरी असती असें जांत घडतें, त्यांत कांहीं चुक झाली किंवा नाहीं हें नऊ टाकण्याचे कृतीनें सांपडत नाहीं. जर कांहीं कृति श्रमाची असून तिचा कांहीं अधिक ताळा पहाण्याची गरज असेल, तर नऊ टाकल्यानंतर अकरा टाकण्याची रीति उपयोगी पडेल. ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे, कीं १०+१, १००-१, १०००-१, इत्यादि हे सर्व अकरांनीं निःशेष भागिले जातात. तर यावरून अकरांचे भागाकारानें जी बाकी रहाती, ती काढण्यास ही पुढील रीति चालेल, आणि बीजानुरूप वजाबाकीशीं जो माहित आहे, त्याचानें ही रीति सोईनें कामांत घेतां येईल. जाला ती रीति माहित नाहीं, त्याणें अकरांनीं भागाकार करावा हें बरें.

डाव्येकडील पहिला अंक दुसऱ्ये अंकांतून वजा कर, नंतर ती बाकी तिसऱ्ये अंकांतून वजा कर, नंतर ती बाकी चवथे अंकांतून वजा कर, आणि याप्रमाणें पुढेहि. शेवटील वजा बाकी धन अथवा ऋण असली, तर तिचें आणि ११ चें अंतर इच्छिलेली बाकी होईल. जसें, १६४२९१५ यांस ११ नीं भागून, बाकी काढायासाठीं याप्रमाणें होईल; ६ तून १ गेला ५ राहिले; ४ तून ५ गेले, -१ राहिला;

२ तून-१ गेला, ३ राहिले; ९ तून ३ गेले, ६ राहिले; १ तून ६ गेले, -५ राहिले; ५ तून-५ गेले, १० राहिले; आणि हे १० बाकी आहेत. परंतु १६४ यांपासून -१ येतो, आणि बाकी १० आहेत; १६४२९१ यांपासून -५ येतात आणि बाकी ६ आहे. सांगितली संख्या जितकी त्वरेने तोंडाने सांगता येईल, तितकी त्वरेने अभ्यासाने वरची वजाबाकी सांगता येईल. जसे, १२७६१९८३३४२४ यांविषयी केवळ याप्रमाणे ह्मणावे लागते, १, ६, ०, १, ८, ०, ३, ०, ४, -२, ६, आणि ६ बाकी आहे.

नऊ आणि अकरा या दोहोंचे टाकण्याने कांहीं प्रश्नांचा ताळा पाहिला असता, त्यांत कांहीं चूक नाही, परंतु जर बरोबर ९९ वेळा चूक झाली असली, तर ती चूक ताळ्याने समजणार नाही.

## पुरवणी भाग तिसरा.

### अंकसंख्या लेखनवाचन क्रमाविषयी.

दहा, दहावेळा दहा, इत्यादि, यांचे स्थळीं १०, १०० इत्यादि येतात, अशी संवई झाली आहे, यामुळे पांचांचे स्थळीं १०, पांच वेळा पांचांचे स्थळीं १००, अथवा बारांचे स्थळीं १०, बारावेळा बारांचे स्थळीं १००, असे कां घेऊं नये याविषयी कांहीं कारण आपल्ये मनांत येत नाही. अंकांचा वेगळाल्या ओळी योजून, त्या वेगळाल्या ओळींतील एक त्याचे पूर्वीचे ओळींचे एकमात्रा समुदाय दाखवायास जरीं घेतों, तरीं दशकांचा समुदायांशिवाय दुसरे कोणतेहि समुदाय घेण्यास कांहीं प्रतिबंध नाही.

जर २ दाखविण्यासाठीं १० घेतले, ह्मणजे ओळींतील प्रत्येक एक त्याचे उजव्येकडचे ओळींचे एकचे दुप्पट असला, तर जें हालीं १, २, ३, ४, ५, ६, इत्यादि हे दाखवितात, ते १, १०, ११, १००, १०१, ११०, १११, १०००, १००१, १०१०, १०११, इत्यादि यांणीं दाखविले जाईल. यास द्विक्रम रीति ह्मणतात. त्रिक्रम रीतिंत १० हे ३ चे स्थळीं घेतले असतात, तर याप्रमाणे होईल. १, २, १०, ११, १२, २०, २१, २२,

१००, १०१, १०२, ११०, इत्यादि. पंचक्रम रितीमध्ये, १० हे पांचांचे स्थळीं येतात, तर २३४ हे, २ पंचवीस, ३ पांच, आणि ४, अथवा एकूणहत्तर आहेत. द्वादशक्रम रितीमध्ये, १० हे बारा दाखवितात, तर दहा आणि अकरा या संख्यांविषयीं कांहीं नवीं चिन्हें योजिलीं पाहिजेत, कां कीं या नव्या पक्षांत १० आणि ११ हे १२ आणि १३ यांचे जागीं येतात; ह्मणून ट आणि इ त्यांचे जागीं घे. तर १७६ यांचा अर्थ हाच आहे कीं १ हा बारा वेळा बारा, ७ बारा, आणि ६, अथवा २३४; आणि १८इ यांचा अर्थ २७५ आहे.

जा अंकाचे स्थळीं दहा घेतात, त्यास अंक संख्या लेखनवाचन रितीचें मूळ ह्मणतात. एके रितीचे संख्येस कोणत्याही दुसऱ्या रितीचें रूप दावयासाठीं, पहिल्या रितीचे अंक मांडून, त्यांस नव्या रितीचे मूळ संख्येनें भाग; नंतर तो भागाकार त्या मूळ संख्येनें पुनः पुनः भागून, त्या वेगळाल्या बाक्या इच्छिलेले अंक आहेत. उदाहरण, दशक रितीप्रमाणें जी संख्या १७०३६ आहे, ती पंचक्रमाप्रमाणें काय आहे?

५) १७०३६

उत्तर, १०२११२१.

५) ३४०७. . बाकी १

५) ६८१. . . . . २

पंचक्रम.

दशक्रम.

५) १३६. . . . . १ ताळा १०००००० यांचा अर्थ १५६२५

५) २७. . . . . १

२०००० . . . . . १२५०

५) ५. . . . . २

१००० . . . . . १२५

५) १. . . . . ०

१०० . . . . . २५

० १

२० . . . . . १०

१ . . . . . १

१०२११२१ . . . . . १७०३६

या रितीचें कारण सोपें आहे. भागाकार कृतीनें १७०३६ यांस ३४०७ इतक्या पंचभागांत भागून वर १ रहातो अशी मात्र कृति आहे; नंतर ३४०७ या पांच भागांत पांचांचे ६८१ पांच भाग येऊन वर २ पांच भाग रहातात नंतर पांचांचे ६८१ पांच भाग यांस पांचांचे



पांचांचे १३६ पांच भाग करून वर पांचांचा १ पांच भाग रहातो; या-  
प्रमाणें पुढेंहि.

व्यवहारी किंवा दशक्रम रितीचे शिवाय दुसऱ्या क्रम रितीने जी सं-  
ख्या दाखवितां येती, तीस गुणायाचें आणि भागायाचें हें अभ्यासाकरितां  
फार उपयोगी आहे. सगळ्या क्रम रितीविषयीं सर्व रिती सर्वांशीं सांख्य्या  
आहेत, ह्मणजे, जे अंक हातचे घेतात ते नेहमी त्या क्रम रितीचे  
मूळ अंक आहेत. जसे, पंचक्रम रितीमध्ये १० चे जागीं पांच हा-  
तचे घेतात;

## उदाहरण.

पंचक्रमरी०	यांचा अर्थ	दशक्रमरी०
४२१४३		२७९८
१२३४		१९४
<hr/>		<hr/>
३२४२३२		१११९२
२३२०३४		२५१८२
१३४३४१		२७९८
४२१४३		<hr/>
<hr/>		५४२८१२
११४३३२२२२		

द्वादशक्रमरी०	दशक्रमरी०
४८९)७६८४३०८(१६६८७	
४८९	७०५)२२६१०७४४(३२०७१
<hr/>	१४६०
२८१४	५०७४
२५४६	१३९४
<hr/>	६८९
२८८६	
२५४६	
<hr/>	
३६५०	
३३२०	
<hr/>	
३३०८	
२८३३	
<hr/>	
४९५	

कोणखेहि क्रम रितीचे संख्येस दुसऱ्ये क्रम रितीचें रूप दावयासाठीं, ही पुढील दुसरी रीति आहे ; डाव्येकडील पहिल्ये अंक स्थळास नव्ये क्रम रितीप्रमाणें जुन्ये रितीचे मूळ अंकानें गुणून, त्या गुणाकाराशीं त्याचे उजव्येकडील जवळचा अंक मिळीव; ही बेरीज नव्ये क्रम रितीप्रमाणें जुन्ये मूळ अंकानें पुनः गुणून, त्या गुणाकाराशीं त्याचे उजव्येकडील दुसरा अंक मिळीव, याप्रमाणें शेवटपर्यंत करित जा, ह्मणजे जी क्रम रिती सोडायची आहे, तीचा मूळ अंक कामांत घ्यावा, परंतु जा रितींत उत्तर इच्छिलें आहे त्या रितीप्रमाणें गणित करावें.

जसें, १६६८७ अशे द्वादशक्रम संख्येस दशक्रम रूप दावयाचें आहे, आणि १६४३२ अशे सप्तक्रम संख्येस चतुःक्रमरूप दावयाचें आहे; असें मनांत आण ;

१६६८७	१६४३२
द्वादशक्रमांतून दशक्रमरूप.	सप्तक्रमांतून चतुःक्रमरूप.
$१ \times १२ + ६ = १८$	$१ \times ७ + ६ = ३१$
$\begin{array}{r} \times १२ + ६ \\ \hline २२२ \\ \times १२ + ८ \\ \hline २६७२ \\ \times १२ + ७ \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \times ७ + ८ \\ \hline ११३३ \\ \times ७ + ३ \\ \hline २२१३० \\ \times ७ + २ \\ \hline \end{array}$
उत्तर, ३२०७१	१०२१०१२

फुटीचें माप १२ समभागांत विभागिलें आहे, यांमुळे बहुधा द्वादशक्रम रिती फारच सोईस पडती. जर एक चौरस फुटीस १२ समभागांत विभागून, प्रत्येक भाग १२ चौरस इंच आहे, आणि या १२ चा १२ वा भाग १ चौरस इंच आहे. एक काटकोन चौकोन शेत आहे, त्याची एक बाजू १७६ फुटी ९ इंच आणि एक इंचाचे ७ बारांश आहे, आणि दुसरी बाजू ६५ फुटी ११ इंच आणि एक इंचाचे ५ बारांश आहे. द्वादशक्रम रिती आणि द्वादशांश कामांत आणिले असतां, वरचा दोन संख्या या पुढीलप्रमाणें होतील, ह्मणजे, १२८.९७

आणि ५५.६५. या दोहोंचा गुणाकार इच्छिल्या चौरस फुटीची संख्या होईल, आणि त्या याप्रमाणे निघतात ;

१२८.९७ उत्तर, द्वादश क्रमाप्रमाणे ६८६८.१४४६

५५.६५ चौरस फुटी, अथवा दशांश रितीप्रमाणे

६१७३ इ ११६६० चौरस फुटी १६ चौरस इंच आणि

११६०९५ चौरस इंचाचे  $\frac{४}{१२}$  आणि  $\frac{११}{१४४}$

६१७३ इ तथापि, इंचाचे प्रत्येक पावाविषयी फुटीचे

६१७३ इ २ शतांश, प्रत्येक ३ इंचांविषयी दुसरा १

६८६८.१४४६ शतांश आणि जर इंचाचे पावावर १२ वा

अंश अथवा २ बारा वे अंश असतील, तर १ शतांश अधिक, याप्रमाणे घेतल्याने खरेपणाचे जवळजवळ होईल. जसे,  $\frac{९७}{१२}$  इंचांविषयी याप्रमाणे असावे,  $\cdot ७६ + \cdot ०३ + \cdot ०१$ , अथवा  $\cdot ८०$ , आणि  $११\frac{५}{१२}$  इंच हे  $\cdot ९५$  असावे; अशावरून वरचे उदाहरण दशांशरूपाने याप्रमाणे होईल, म्हणजे,  $१७६\cdot ८४६५\cdot ९५$ , अथवा  $११६५९\cdot ९६$  चौरस फुटी आहेत, या व्यवहार कामाकरितां पुरतेपणीं खऱ्या होतील.

## पुरवणी भाग चवथा.

### अपूर्णाकांचे व्याख्यानविषयी.

पूर्वी जे अपूर्णाकांचे व्याख्यान सांगितले, त्यापासून कळते, कीं  $\frac{७}{९}$  हे सातांचा नववा भाग आहे, आणि असे दाखविले, कीं हे आणि एकाचे सात नवमांश सारखेच आहेत. परंतु अपूर्णाकांची सुचना अनेक तऱ्हेचे बोलण्यानें होती, ती सर्व न्यूनाधिकतेनें कामांत घेतात.

पहिल्यानें.  $\frac{७}{९}$  हे ७ चा ९ वा भाग.

दुसऱ्यानें. एकाचे ७ नवमांश.

तिसऱ्यानें. ७ हे ९ वांचा जो अपूर्णाक आहे तो.

चवथ्यानें. ७ यांत जितक्या वेळा ९ जातात तितक्या वेळा, अथवा एक वेळाचा भाग.

पांचव्यानें. नवांस, सातांचें, रूप देण्यास जो गुणक तो.

सहाव्यानें. ९ वांस ७ तांचें जें प्रमाण, तें.

सातव्यानें. ७ तांस ९ वांचें जें प्रमाण आहे त्याचा रूप भेद करितो जो गुणक तो.

आठव्यानें. ९, १ आणि ७, यांचें चवथें प्रमाण तें.

वर सांगितलेल्या पहिल्ये आणि दुसरे व्याख्यानाचा अर्थ मागें सांगितला आहे. तिसरें व्याख्यान याप्रमाणें निघतें; ९ वांस ९ समभागांत विभागिलें, तर प्रत्येक भाग १ आहे, आणि त्यांतील ७ भाग ७ आहेत; यामुळे ९ चा जो अपूर्णांक ७ आहे, तो  $\frac{७}{९}$  आहे. यापासून चवथें व्याख्यान खरेनें निघतें; कां कीं गुणाकारांत जी कृति पुनः पुनः करावी लागती, ती दाखवायासाठीं वेळा शब्द कामांत घेतात, आणि बोलण्याचे विस्तारानें संख्येचा कांहीं भाग, तो त्या संख्येचे एक वेळेचा भाग आहे असें ह्मणतां येतें. पांचव्या व्याख्यानांत केवळ शब्दांची उलटापालट आहे; कोणत्याहि संख्येचे एकंदर रकमेचे  $\frac{७}{९}$  केले, तर प्रत्येक ९ चे सात होतात, आणि नवांवर जो अपूर्णांक बाकी राहतो, तो ७ शां संबंधी अपूर्णांक असतो. अ चे  $\frac{७}{९} = ७$  वेळा  $\frac{७}{९}$  हें समीकरण सिद्ध केल्यावर, वरची गोष्ट संपूर्ण सिद्ध करितां येईल. सहावें, सातवें, आणि आठवें, हीं व्याख्यानें प्रमाणाचे अध्यायांत दाखविली आहेत.

जेव्हां शिकणारा बीजगणित शिकूं लागेल, तेव्हां त्यास असें कळेल, कीं जेथें बीजगणित लागू करावें लागतें, तेथें  $\frac{७}{९}$  असा अपूर्णांक आला असतां, त्यांत अ आणि व हे प्रत्येक अपूर्णांक आहेत अशी कल्पना बहुतकरून केली पाहिजे. यामुळे, असे अवघड जातीचे अपूर्णांकांचें मनन करण्याची संवई असावी हें मोठें अगत्याचें आहे,

$\frac{७}{९}$  यांची कल्पना वरचे पहिल्ये आणि दुसऱ्या व्याख्यानांवरून सहज ध्यानांत येती; परंतु  $\frac{२\frac{१}{२}}{४\frac{३}{४}}$  असा अपूर्णांक घेतला, तर या पक्षांत वरचे

तिसऱ्या आणि त्याचे पुढील सर्व व्याख्यानांचे अर्थावरून त्यापेक्षां कल्पना अधिक उघड होईल.  $\frac{२\frac{१}{२}}{४\frac{३}{४}}$  चे ( $\frac{४\frac{३}{४}}{२\frac{१}{२}}$ ), अथवा १ एकचे  $\frac{२\frac{१}{२}}{४\frac{३}{४}}$  चे ( $\frac{४\frac{३}{४}}{२\frac{१}{२}}$ ) यांविषयी कांहीं कल्पना मनांत येत नाहीं; खरें ह्मटलें, तर को-

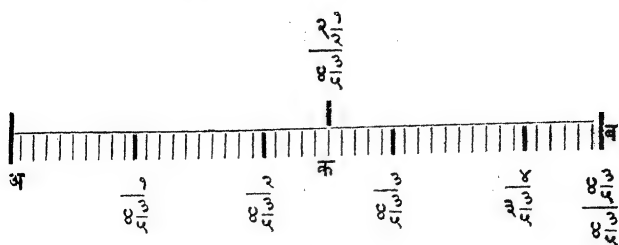
णत्येहि वस्तूचे (४ $\frac{३}{४}$ ) असें ह्मणण्यानें नव्ये तऱ्हेचें विशेषण कल्पिलें जातें. परंतु २ $\frac{१}{२}$  हे (४ $\frac{३}{४}$ ) चे कांहीं अपूर्णांक आहेत असें सहज मनांत येईल; ह्मणजे पहिला अपूर्णांक दुसऱ्याचे कांहीं एक वेळेचा भाग आहे; आणि कांहीं संख्येचे प्रत्येक ४ $\frac{३}{४}$  समभागांस २ $\frac{१}{२}$  शांचें रूप द्यावयासाठीं कांहीं गुणक असावा; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. या वरचा मिश्र जातीअपूर्णांकास, पहिलें आणि दुसरें व्याख्यान लागू होईल अशी कांहीं रीति काढितां येईल कीं नाहीं हें आतां पहातों.

कांहीं लांबीचा चवथा भाग, पांचवा भाग, यांची कल्पना सहज मनांत येती, ह्मणजे, हे भाग रेघा आहेत, जांचे ४ आणि ५ सांगीतल्ये लांबीचे बरोबर आहेत; आणि दुसरी एक लांबी आहे, तिची चौपट आणि तिचे  $\frac{३}{२}$  सांगीतल्ये लांबीचे बरोबर होतील. उदाहरण, १४ यांस २ $\frac{१}{२}$  समभागांत भागिलें असतां ६, ६, २, असे भाग होतात, ह्मणजे, त्यांत ६, ६, असे २ समभाग, आणि २ हे एक भागाचा  $\frac{१}{३}$  असें ह्मणतां येईल. यावरून १४ चे (२ $\frac{१}{२}$ ) सा ६ आहेत असें ह्मणतां येईल. अ ब रेघेस क, ड, इ, इत्यादि बिंदूवर ११ समभागांत विभागिली, तर अक, सर्व रेघेचा ११ वा भाग आहे, अड (५ $\frac{१}{२}$ ) वा, अई (३ $\frac{३}{४}$ ) वा, अफ (२ $\frac{३}{४}$ ) वा,

अ क ड इ फ ग ह ऐ ख ल म व

अग (२ $\frac{१}{४}$ ) वा, अह (१ $\frac{५}{६}$ ) वा, अऐ (१ $\frac{४}{९}$ ) वा, अख (१ $\frac{३}{८}$ ) वा, अल (१ $\frac{३}{८}$ ) वा, अम (१ $\frac{१}{१०}$ ) वा, अब हा अब चा पहिला पूर्ण भाग आहे. जेव्हां अब १ आहे असें ह्मणतात, तेव्हां अफ  $\frac{१}{२\frac{३}{४}}$  आहे,

असें झटलें पाहिजे, नाहीं तर, एक जातीचे अपूर्णांकास एक तऱ्हेचें व्याख्यान, आणि दुसऱ्ये जातीचे अपूर्णांकास दुसऱ्ये तऱ्हेचें व्याख्यान करावें लागेल. या तऱ्हेनें कोणत्याहि संक्षिप्त रिती घेतल्या तरी  $\frac{अ}{ब}$  या अपूर्णांकापासून अशी सुचना होती, कीं कांहीं अपूर्णांक काढायाचा आहे, जो पुनः पुनः बवेळा घेतला असतां १ होईल, आणि तो अपूर्णांक अवेळा घेण्याचा आहे असें सर्व कबूल करितील.



अशांने,  $2\frac{1}{2}$  यांत काढायासाठी, एक एकमास  $8\frac{3}{4}$  भागांत भागितल्याने सोईस पडते; असे १० भाग,  $8\frac{3}{4}$  वेळा घेतले, तर सर्व लांबी निघेल. यावरून  $\frac{8\frac{3}{4}}{10}$  हे  $(8\frac{3}{4})$  आहेत, आणि असे  $2\frac{1}{2}$  भाग घेतल्याने  $\frac{24}{8}$ , अथवा अक होईल. अशा रितीने मिश्र अपूर्णाकांचे विवरण करण्याचा शिकणाराने अनेक उदाहरणांवर अभ्यास करावा.

परंतु  $3\frac{1}{2}$  यांत छेद एकापेक्षां कमी आहे, तेव्हां याविषयी काय ह्मणावे? यांत एकाचे ( $\frac{2}{2}$ ) असवे कीं काय? असतील तर ते काय आहेत? छेदाचे स्थळीं जर नुसते ५ असते, तर असा भाग घेतला असता, कीं जो ५ वेळा घेतल्याने १ होईल. परंतु जापेक्षां छेदाचे स्थळीं  $\frac{3}{2}$  आहेत, यामुळे असा भाग घेतला पाहिजे, कीं जाचे  $\frac{3}{2}$  एक एक बरोबर होतील. तो भाग एक एकपेक्षां अधिक आहे; ह्मणजे तो  $2\frac{1}{2}$  एक आहे; तर  $2\frac{1}{2}$  चे  $\frac{3}{2}$  घेतल्याने १ होतो. यावरून वरचा मिश्र अपूर्णाक असें दाखवितो कीं  $2\frac{1}{2}$  एकमास  $3\frac{1}{2}$  वेळा पुनः पुनः घेण्याचे आहे. **गुणाकार** या शब्दाचा अर्थ वेळेचा भाग घेणे असा विस्तीर्ण केला असतां, सगळे गुणाकार भागाकार आहेत, आणि सगळे भागाकार गुणाकार आहेत, आणि जे सर्व शब्द त्यांतून एकास लागतात, ते दुसऱ्याचे उत्तरावर लागू होतील.

जर  $2\frac{1}{2}$  यार्डांची किंमत  $3\frac{1}{2}$  रुपये असेल, तर १ यार्डाची किंमत काय आहे? या तऱ्हेचे पक्षांत, फार सरळ प्रश्न शिकणाराचे दृष्टीपुढे आहे असे वाटते. जर ५ यार्डांची किंमत १० रुपये असली, तर प्रत्येकाची किंमत  $\frac{10}{5}$ , किंवा २ रुपये होईल, असें त्यास त्वरेने कळते, आणि त्याच रितीने मिश्र अपूर्णाकापासून खरें उत्तर येईल, असें

त्याचे मनांत येऊन या उदाहरणास  $\frac{३\frac{१}{२}}{२\frac{१}{३}}$  असे मांडून रितीप्रमाणें  $\frac{३}{२}$  अथवा  $१\frac{१}{२}$  काढून एक यार्डाची किंमत  $१\frac{१}{२}$  रुपये आहेत असे त्यास समजतें. हें उत्तर बरोबर निघतें खरें; परंतु ही रीति पूर्णांकाविषयी खरी दिसती, ती अपूर्णांकावरहि लागू होण्यासाठीं कांहीं सिद्ध करून दाखविण्याचें प्रयोजन नाहीं, असें त्याणें मनांत आणू नये; पैशाची भलती कांहीं रकम आहे, तीस  $२\frac{१}{३}$  वेळा घेतली असतां,  $३\frac{१}{२}$  रुपये होतात, ती रकम वरचे प्रश्नांत इच्छिली आहे. एक रुपयास १४ समभागांत विभागून, त्यांतले ६ भाग  $२\frac{१}{३}$  वेळा पुनः पुनः घेतले तर १ रुपया होईल. त्यास  $३\frac{१}{२}$  वेळा घेण्यासाठीं, तसेंच पुनः पुनः केल्याने प्रत्येक पायरीस  $३\frac{१}{२}$  असे ६ भाग किंवा २१ घेतले पाहिजेत. यावरून  $\frac{३१}{१४}$ , अथवा  $१\frac{१}{२}$  ही एक यार्डाची किंमत आहे.

## पुरवणी भाग पांचवा.

### गुणदर्शकाविषयी.

लागरतम् कामांत आणतेसमयीं ही पुढील गोष्ट फार उपयोगी आहे, असें शिकणारास दिसेल. आतां, भागाकार करण्याचे पूर्वी, भागाकारांतील दशांश बिंदूचें स्थळ कोठे असावें, तें खरेनें काढण्याचे रितीविषयीं मात्र सदाः येथें सांगतों.

जेव्हां कांहीं संख्येचे वर गराद मांडिली असती, जसें ७, या संख्येस उणी ह्मणवें, आणि त्या अर्थानें ती कामांत घ्यावी; त्याच जातीचे संख्येचे बेरिजेनें ती अधिक होती, आणि त्याच जातीचे संख्येचे वजाबाकीनें ती कमी होती असें समजावें; जसें, ७ आणि २ यांची बेरीज ९ होती, आणि ७ यांतून २ वजा केले, तर ५ रहातात. परंतु उण्ये संख्येशीं गरादे वांचून संख्येची बेरीज केली, तर संख्या कमी होती, आणि त्यांतून वजा केली, तर ती उणी संख्या अधिक होती असें समजावें. जसें, ७ आणि ४ यांची बेरीज ३, ७ आणि १२ यांची

बेरीज ५, आणि ७ यांतून ८ वजा केले, तर १५ होतात. सारांश, १, २, ३, इत्यादि प्राप्ती आहे, आणि १, २, ३, इत्यादि तोटा आहे असे मनांत आणावे; प्राप्ती मिळवणे अथवा तोटा गमावणे, आणि प्राप्ती गमावणे, अथवा तोटा मिळविणे हे सारिखेच आहे असे समजावे. जसे ४ हे ११ यांणीं कमी केले, तर ७ होतात असे छटले, ह्मणजे जा समयी ४ चा तोटा आला, त्या समयीच ११ चा तोटा काढिला हे ७ चे प्राप्तीबरोबर आहे असे ह्मणतात; आणि ४ यांस २ नीं कमी केले तर ६ होतात, असे छटले, ह्मणजे ४ चा तोटा असून २ ची प्राप्ती नाहीशी झाली, तर सर्व मिळून ६ चा तोटा होतो असे ह्मणतात.

संख्येचे गुणदर्शकाचा अर्थ या पुढीलप्रमाणे समजावा; जेव्हां दशांश बिंदूचे डाव्येकडे अंकस्थळें आहेत, तेव्हां गुणदर्शक, अंक स्थळांचे संख्येत एक उणा इतका आहे. जसे, ३.२१४, १.००८३, ८, अथवा ८.००, ९.९९९, या सर्वांचा गुणदर्शक ० आहे. परंतु १७.३२, ४८, ९३.११६, या सर्वांचा गुणदर्शक १ आहे; १२६.०३ आणि १२६ यांचा गुणदर्शक २ आहे; ११९३.७२६४.६६६ यांचा गुणदर्शक ७ आहे. परंतु दशांशचिन्हाचे डाव्येकडे कांहीं अंकस्थळें नसलीं, तर दशांशाचा पहिला अर्थ बोधक अंक पाहून, त्याप्रमाणे गुणदर्शकाचे चिन्ह उणे करावे. जसे, ६१२, १२१, ९००४ या सर्वांत दशांशाचे पहिल्या स्थळीं अर्थबोधक अंक आहे, यामुळे त्यांचा गुणदर्शक १ आहे; परंतु ०१८ आणि ०९९ यांचा गुणदर्शक २ आहे; ०००१७ यांचा गुणदर्शक ४; आणि ०००००००००१ यांचा गुणदर्शक ९ आहे.

भागाकाराचा गुणदर्शक काढावा करितां, भाज्याचा गुणदर्शकांतून भाजकाचा गुणदर्शक वजा कर, परंतु भाज्याचे पहिल्या अर्थबोधक अंकापेक्षां भाजकाचा पहिला अर्थबोधक अंक अधिक असेल, तर वजावाकी करण्याचे पूर्वी एक हातचा घेतला पाहिजे. उदाहरण, १४६.०८ यांस ००२७९ यांणीं भागायाचे आहे असे मनांत आण. या दोन संख्यांचे गुणदर्शक २ आणि ३ आहेत; आणि २ तून ३ वजा केले तर ५ होतील. परंतु पहिल्यानें असे दिसते कीं २७ हे त्यांचे स्थळांचे किमतीचा विचार न करितां नुसते घेतले, तर हे भाजकाचे पहिले अर्थ बोधक अंक, भाज्याचे पहिले दोन अंक ह्मणजे १४ यांपेक्षां अधिक आहेत. यामुळे वजावाकी केल्याचे पूर्वी ३ यांत हातचा एक



घेतल्याने २ होतात, आणि हे त्या २ तून वजा करून ४ होतात. छणजे भागाकाराचा गुणदर्शक ४ आहे, आणि, यामुळे भागाकारांत दशांश बिंदूचे डाव्येकडे ५ अंकस्थळे आहेत. अथवा जर भागाकाराचे पहिले अंक अवकडइफ असे असले, तर अवकडइफ असे दशांश चिन्ह मांडिले पाहिजे. परंतु ००२७९ यांस १४६०८ यांनी भागायाचें असतें, तर हातचे घेण्याचें प्रयोजन नसतें; आणि ३ यांतून २ वजा केले, तर ५ होतात; छणजे, भागाकारांत पहिला अर्थ-बोधक अंक पांचव्येस्थळां येईल. यावरून भागाकारांत पहिल्या अर्थ-बोधक अंकाचे डाव्येकडे ००००० असें येईल. आणि या रितीवरून कांहीं उदाहरणें केलीं असतां, ही गोष्ट पुरतेपणीं लक्षांत येईल. आणि तेजेंकरून भागाकाराचा पहिला अंक काढल्याचे पूर्वीच त्यास त्याचा योग्य अर्थ लावितां येईल.

## पुरवणी भाग सहावा.

पैक्याचे दशांशरूप हिशोबाविषयीं.

आणे, पै यांस रुपयांचें दशांशरूप देणें, अथवा त्याचे उलट दशांशांस रुपयांचें रूप देणें, असें बहुधा घडतें.

आणे, पै यांस रुपयांचें दशांशरूप देण्यासाठीं, ही पुढील सरळ रीति आहे; आरंभी लक्षांत ठेवावें, कीं

८ आणे, हे रुपयाचे ०.५०	} आहेत.
४ आणे . . . . . ०.२५	
२ पै . . . . . ०.०१   ०.४१	

यावरून २ पै ह्या १ रुपयाचे  $\frac{1}{500}$  चे इतक्या जवळजवळ आहेत, कीं त्या त्याचे बरोबर आहेत, अशी कल्पना करून ४ आणे होतपर्यंत पहिल्या दोन दशांशस्थळांत कांहीं चूक येणार नाहीं; दोन स्थळांपर्यंत आल्यावर  $२४ \times २$  पै = ०.२५; यावरून, दशांशांचीं पहिलीं दोन स्थळे काढण्याची रीति हीच आहे.

प्रत्येक चार चार आण्याविषयीं ०.२५ मांड, आणि त्यावरचे पैची संख्या सम असली, तर प्रत्येक दोन दोन पै विषयीं, दशांशाचे दुसऱ्ये

स्थळीं १ मांड; परंतु वरची पैची संख्या विषम असून दोन आण्याचे वर असल्या, तर त्यावरचे विषम पै विषयीं, दशांशाचे दुसऱ्ये स्थळीं १ अधिक मांडावा, जेव्हां वरचा पै दोन आण्यापैक्षां कमी आहेत, तेव्हां विषम पै सोडाव्या.

असें, आ. पै आ. पै

$$१३ \dots ४ = १२ \quad १६ = ०\cdot७५ + ०\cdot८ = ०\cdot८३ \text{ रुपयाचे.}$$

$$११ \dots ७ = ८ \quad ४३ = ०\cdot५० + २२ = ०\cdot७२ \text{ रुपयाचे.}$$

$$८ \dots ९ = ८ \quad ९ = ०\cdot५० + ०\cdot४ = ०\cdot५४ \text{ रुपयाचे.}$$

शेवटील्ये ४ आण्याचे वर जा पै असतील, त्यांशिवाय दशांशाचे तिसऱ्ये आणि चवथे स्थळांविषयीं कोणत्याहि पैपासून काहीं निघत नाहीं, हें स्पष्ट आहे. कां कीं प्रत्येक २ पैवर  $०\cdot००४ \frac{१}{६}$  इतकी कसर जाती, ती प्रत्येक ४ आण्यांस  $०\cdot१$  होती. आणि ही पूर्वीचे हिशोबांत येती. यामुळें तिसरें आणि चवथें दशांशस्थळ भरायासाठीं या पुढील प्रमाणें कर.

शेवटील चार आण्यांवरचा पै जर सम असतील, तर त्या प्रत्येक पै विषयीं दशांशाचे चवथे स्थळीं २ घे, अथवा विषम असतील, तर शेवटील दोन आण्यांवरचे प्रत्येक पैविषयीं २ घे, आणि प्रत्येक आण्याविषयीं  $६ \times २$  पै हणून १ अधिक घ्यावा.

जर चार दशांश स्थळांपैक्षां अधिक स्थळें घेतली पाहिजेत, तर शेवटील आण्यांवर जा पै असतील, तितके अंश आणि १२ छेद कल्पून त्या अपूर्णाकास दशांशरूप देऊन जोडून मांडावे.

$$\begin{aligned} \text{लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं } \frac{१}{१२} &= ०\cdot८३३ \dots \frac{७}{१२} = ०\cdot५८३३ \dots \\ \frac{२}{१२} &= ०\cdot१६६६ \dots \frac{८}{१२} = ०\cdot६६६ \dots \\ \frac{३}{१२} &= ०\cdot२५ \dots \frac{९}{१२} = ०\cdot७५ \dots \\ \frac{४}{१२} &= ०\cdot३३३ \dots \frac{१०}{१२} = ०\cdot८३३ \dots \\ \frac{५}{१२} &= ०\cdot४१६६ \dots \frac{११}{१२} = ०\cdot९१६६ \dots \\ \frac{६}{१२} &= ०\cdot५ \end{aligned}$$

तर, आणे पै

$$१३ \dots ४ = ८३|३३|३३ \text{ रुपयाचे आहेत.}$$

$$११ \dots ७ = ७२|३९|५८३३$$

वरचे रितीचे उलट रीति या पुढीलप्रमाणें आहे, असें स्पष्ट दिसेल;  
 प्रत्येक २५ विषयां ४ आणे मांड, आणि त्यांचे वर जे राहिले त्यांस,  
 पैचें रूप देण्यासाठीं दर शेंकड्यास ४ वजा करून बाकी राहिल ति-  
 ची दुप्पट करावी, आणि दशांश बिंदू दोन स्थळें उजव्येकडे सारावा.  
 उदाहरण. ७ मण ..  $१३\frac{१}{४}$  शेर लोखंडाची किंमत दरशेरी २ आ.  
 ४ पै प्रमाणें काय होईल ?

आ. पै

$$२ \dots ४ = १४५८३३३$$

४०

$$\underline{५८३३३३..}$$

७

$$\underline{४०८३३३३}$$

$$१० \text{ शेर } \dots १४५८३३$$

$$२ \text{ शेर } \dots २९१६६$$

$$१ \text{ शेर } \dots १४५८३$$

$$\frac{१}{४} \text{ शेर } \dots ०३६४५८$$

रु. आ. पै.

$$४२७६५६२ = ४२ \dots १२ \dots ३ \text{ हें उत्तर.}$$

या पुढीलप्रमाणें निघतें.

४२७६५६२ यांपासून ४२ रुपये आणि ७६५६२ रुपये

तर ७६५६२

$$\underline{७५} = १२ \text{ आणे}$$

$$\underline{०१५६२}$$

६२

शेंकडा चार प्रमाणें वजा करून

$$\underline{०१५००} \text{ बाकी}$$

१५०० दोन दशांशस्थळें, उजव्येकडे सारून.

२

$$\underline{३००} \text{ दुप्पट करून}$$

रु. आ. पै.

३ पै, यावरून ४२ .. १२ .. ३ उत्तर.

## पुरवणी भाग सातवा.

वहिवाटवहीचा रितीचे मूळ कारणाविषयी.

याविषयीचे ग्रंथांमध्ये पुरतेपणीं समजाया जागे असें बहुतकरून फार थोडे लिहितात, यामुळे जेव्हां हिशोब शुद्ध रितीने ठेविलेले असतात, त्यांचा जा मूळ रिती त्यांविषयी कांहीं सुचना एथें दिली असतां, जांस वहिवाटवही शिकण्याची असेल त्यांचे ती उपयोगी पडेल.

जो पुरुष व्यापार करितो, त्यास आपले व्यवहाराचे स्थितीचा झाडा घेतोसमयी, या पुढील तीन गोष्टी बरोबर समजाव्या अशी इच्छा असती; पहिली, व्यापार करण्याचे आरंभें अथवा जुना व्यापार असल्यास मागला झाडा घेतल्यावर आपल्ये जवळ काय होतें; दुसरी, पूर्वीचा आणि हालींचा झाडा घेण्याचे काळामध्ये व्यापाराचा निरनिराळ्या खात्यांमध्ये लाभ आणि हानी काय झाली ती; तिसरी, झाडा घेतल्यानंतर त्याचे जवळ एकंदर वित्तविषय किती तो. यांतील पहिल्या दोन गोष्टीपासून तिसरी गोष्ट सहज कळेल. याच रितीप्रमाणें एकंदर हिशोब तपासण्याचे मुदतीचे आंतच, कदाचित् एकाद्या खात्याची स्थिती कशी आहे हें जाणण्याची इच्छा असल्यास, तेही काढितां येईल.

मागील झाड्यापासून, एक प्रकारचे व्यवहारांत जी कांहीं घडामोड जा रितीने मांडितात त्यास खातें ह्मणतात. त्यामध्ये जमा आणि खर्च हीं मात्र असतात, आणि यावरून त्यांत जमेची किंवा रिणको, आणि खर्चाची अथवा धनको, अशा दोन बाजू आहेत असें ह्मणतात.

सगळे हिशोब बहुतकरून पैक्याने ठेवितात. ह्मणजे जर कांहीं माल खरेदी केला, तर त्या खरेदीकरितां जो पैका दिला, त्यापैक्याने त्या मालाचा हिशोब मांडितात. जर कोणी कर्जदारानें एकादी हुंडी आणून दिली, आणि त्या हुंडीचा पैका मुदतीनंतर मिळाल्याचा आहे, तर त्या हुंडीची किंमत पैक्याने मांडितात. सर्व जिनसा, सरंजाम, घोडे इत्यादि, जा वस्तू व्यवहार कामासाठीं जवळ असतात, त्यांचा हिशोब त्यांचे किंमतीवरून मांडितात. सगळें रोकड नाणें, व्यांकनोट, इत्यादि जीं आपल्या जवळ असतात, अथवा बाहेरून आलेलीं असतात, तितकाच पैका आपल्ये वहीत लिहिलेला असतो, आणि तो शुद्ध पैका आहे ह्मणून त्यास रोकड असें ह्मणतात.

प्रत्येक खात्यांत जी घडामोड होती, तिचा योगानें त्या खात्याचें न्यूनाधिक्य होतें, आणि तें प्रत्येक खातें निरनिराळ्या पुरुषाचे स्वाधीन आहे, अशा कल्पनेवरून सर्व हिशोब ठेविलेले असतात. प्रत्येक खातें चालविण्याविषयीं वेगळाला कारकून आहे असें मानून शिकणाराची समजूत होत आहे, तर तसें त्याणें मानावें; झणजे रोकड संभाळण्यास आणि तिची देवघेव करण्यास एक कारकून आहे; मुदत पुरी झाल्यावर जा हुंज्यांचा पैका घेणें आहे, त्यांविषयीं एक कारकून; मुदत पुरी झाल्यावर जा हुंज्यांचा पैका देणें आहे, त्याविषयीं एक कारकून; जर कापडाचा व्यापार आहे, तर त्याविषयीं एक कारकून; जर साकरेचा व्यापार असेल, तर त्याविषयीं एक कारकून; सावकारा बरोबर जा जा पुरुषांचा व्यापार असतो, त्याविषयीं एक कारकून; लाभ आणि हानी यांविषयीं एक कारकून; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

हे सर्व कारकून अथवा खातीं एक सावकाराचीं असतात, आणि शेवटीं त्या कारकुनांस या पुढीलप्रमाणें हिशोब द्यावा लागतो; झणजे जी मालमत्ता त्यांचे स्वाधीन होती ती पुढें करावी, अथवा कोणास दिली हें दाखवून त्यांणीं मोकळे व्हावें. त्या कारकुनांनीं जें जें घेतलें असेल, अथवा जाविषयीं ते जिम्मेदार होते, त्याविषयीं ते सावकारास कर्जदार अथवा रिणको आहेत; जा सर्व वस्तु त्यांचा पासून जातात, अथवा जाविषयीं ते धन्यास जिम्मेदार नाहींसे होतात, त्याविषयीं ते मोकळे अथवा धनको होतात. जास हा विषय गुढा सारखा न वाटावा असें असेल त्याणें हे शब्द विस्तीर्ण अर्थानें घ्यावे. जसें, काहीं व्यवहारामुळें एखाद्या खात्याकडे तिऱ्हाईत पुरुषाची जिम्मेदारी येती, तेव्हां तो हिशोब आपल्या वहींत धनको केला पाहिजे, आणि काहीं व्यवहारामुळें खात्याकडील तिऱ्हाईत पुरुषाची जिम्मेदारी नाहींसी होती, तेव्हां तो हिशोब आपल्या वहींत रिणको केला पाहिजे. परंतु जेव्हां काहीं एक हिशोब आपल्या वहींतील एका खात्याची जिम्मेदारी काढून दुसऱ्या खात्याकडे नेतो, तेव्हां पहिला हिशोब आपल्या वहींत रिणको केला पाहिजे, आणि जेव्हां काहीं हिशोब एकाद्या खात्याकडे जिम्मेदारी आणितो, तेव्हां तो हिशोब धनको केला पाहिजे.

वर सांगितलेले सर्व कारकून अथवा खातीं कोणास जिम्मेदार असतात, आणि त्या जिम्मेदारीपासून त्यांस कोण मुक्त करितो? सावकार,

हे निःसंशय उत्तर आहे, परंतु, खरे झटले असतां या प्रश्नाचे उत्तर वर सांगितलेला शिल्लकबाकी काढणारा कारकून आहे, तो त्यांस मुक्त करील. परंतु वेगळालीं खातीं परस्परांला रिणको, आणि परस्परांनीं धनको असें ह्मणण्याची चाल आहे. जसें, घेण्याचे हुंड्यांला रोकड रिणको आहे, ह्मणजे अर्थ हाच, कीं रोकडखातें अथवा जो कारकून तें खातें राखितो, तो सावकारास हुंडीचे पैक्याविषयीं जिम्मेदार होतो. ही गोष्ट विस्तारानें उघडून सांगितली असतां याप्रमाणें होईल; कोणीएक कारकून क, रोकडीचें खातें बाळगतो, आणि जेव्हां कोणी अ पुरुषापासून हुंडीचा पैका मिळाला असतो तो जेव्हां कचे हातीं येतो, तेव्हां त्या पैक्याविषयीं क जबाब देणारा असतो. यासारखें घेण्याचे हुंडीचे खात्यांत याप्रमाणें मांडितात, ह्मणजे घेण्याचा हुंड्या रोकडीनें धनको. ही गोष्ट विस्तारानें सांगितली असतां याप्रमाणें होईल; कोणी ब कारकून घेण्याचे हुंडीचें खातें राखितो, आणि जी अ ची हुंडी त्याजवळ होती ती मुदत भरल्यावर, अ जवळून पैका घेउन क कारकुनास दिल्यावर, ब कडची जिम्मेदारी नाहींशी होती. घेण्याची हुंडी रोकडीनें धनको याचा अर्थ उघड आहे, परंतु रोकड, घेण्याचे हुंडीला रिणको असें ह्मणणें योग्य नाहीं. हुंडीबदल जो पैका मिळतो त्याविषयीं रोकडीचें खातें सावकाराला त्या रकमेनें रिणको, आणि घेण्याचे हुंडीनें रोकड रिणको आहे असें मांडण्यास योग्य आहे. कल्पनारूप ऋणें जांस देण्याचीं असतात, त्यांस त्यांतून कांहीं देत नाहीं, अशानें जरी व्यवहारांत कांहीं अडथळा येत नाहीं, तथापि त्यापासून शिकणारा घोंटाळ्यांत पडतो; असें आहे, तथापि शिकणारानें हाच बोलण्याचा प्रकार काईम ठेवून त्याचा खरा अर्थ ध्यानांत ठेवावा.

जो कोणी ऋणकरी किंवा देणेंदार आहे, त्याचा वेगळाल्या देण्याचा रकमा त्याचा खात्यांत रिणको केल्या असें ह्मणतात; आणि जो धनको किंवा घेणेंदार, अथवा कांहीं रकमांपासून मुक्त झाला असतो, त्याचा खात्यांत त्या रकमा धनको केल्या असें ह्मणतात. जे पुरुष देतात त्यांस रिणको केले पाहिजेत; आणि जे पुरुष देतात त्यांस धनको केले पाहिजेत.

हिशोबांत कांहीं खोडीत नाहीं. जर कांहीं रोख घेतलेली रकम परत केली, तर ती दिलेली रकम रोकडीचे खात्याचे जमेचे किंवा रि-

णको बाजूंतून खोडून टाकीत नाही, परंतु ती रकम त्याच खात्याचे धनको अथवा खर्चाचे बाजूस दिली असे लिहितात.

जा वहीत निरनिराळीं खातीं घातलेलीं असतात, तीस खतावणी म्हणतात. तीस दोन बाजू असतात, ह्मणजे पहिली अथवा रिणकोबाजू आणि तिचा समोरची दुसरी अथवा धनको बाजू. डावी बाजू नेहमी रिणको असते. याशिवाय व्यापारी दुसऱ्या कांहीं वद्धा बाळगतात, परंतु त्यांचा योगानें खतावणी नीट राखण्यास मात्र सहाय्य होतें. जसे खर्डावही, तीत जी सर्व घेवदेव व्यवहारांत होती ती व्यवहारी भाषेनें लिहिलेली असते; दुसरी रोजकीर्दीची वही, तीत खर्डावहीत लिहिलेली सर्व देवघेव खतावणीचे पद्धतीप्रमाणें कांहीं नियमित काळीं मांडितात. रोजकीर्दीतील रकमा खतावणीचे जा पृष्ठावर नेलेल्या असतात, त्या पृष्ठांचा अंक रोजकीर्दीत त्या रकमेचे मागें मांडितात, आणि खतावणीतील रकमा रोजकीर्दीचे जा पृष्ठावरून घेतात, त्या पृष्ठांचा अंक खतावणींत त्या रकमेचे मागें असतो; हवाला देण्याचे या रितीपासून खतावणीमध्ये पुष्कळपणीं संक्षेप करितां येतो. जसे, कांहीं दिवसांचे व्यवहाराची रोजकीर्द घालतेसमयीं, जर कित्येक रकमा एकाच दिवशीं एक वेळा किंवा वारंवार दिल्या किंवा घेतल्या असतील, असें जेव्हां घडतें, तेव्हां त्या सर्वांची बेरीज खतावणींत मांडितां येईल, आणि त्या किर्कोळ रकमांनीं रोकडीचा हिशोब रिणको किंवा धनको करावा; ह्मणजे प्रत्येक रकम सर्व रकमेचे पोटची आहे असें जाणून, धनको किंवा रिणको लिहावी. आतां एथें केवळ खतावणीविषयीं मात्र सांगण्याचें प्रयोजन आहे. बाकी सर्व वद्धा, आणि त्या राखण्याची रीति, जरी फार उपयोगाची आहे, तरी त्यांस वद्धा राखण्याचे मुख्य कारणाचा आधाराची गरज नसते. जे जे व्यवहार होतात, त्यांविषयींचा सर्व वेगळाल्या रकमा खतावणींत एकदांच मांडिल्या आहेत अशी कल्पना कर. वर सांगितल्यावरून असें दिसतें कीं प्रत्येक रकम दोन वेळा मांडिली जाते. जर ब चे नावावर कांहीं पैका अ देतो, तर एकवे खाल्यामध्ये तें याप्रमाणें मांडितात, ब नें अ धनको; आणि दुसऱ्या खात्यामध्ये असें मांडितात, अ ला ब रिणको. यास दुहेरी वहिवाटवही म्हणतात; यावरून सर्व वहीतील रिणको बाजूचे सर्व रकमांची बेरीज, धनकोबाजूचे सर्व रकमांचे बेरिजेबरोबर असते.

कारण धनको बाजूचा सर्व रकमा रिणको बाजूचे रकमांबरोबर असतात, परंतु त्यांचे मांडण्याची तऱ्हा उलटी असती. सोईस पडल्यास प्रत्येक रकमेची एकेरी मांडणी झाल्यावर, दुहेरी मांडणीहि करितां येईल. गुणाकाराचा कोष्टकास दुहेरी वहिवाटवहीचा कोष्टक ह्मणतात, उदाहरण, ४२ हा अंक त्या कोष्टकांत जरी एक वेळ येतो, तरी तो दोन तऱ्हांनीं दिसण्यांत येतो, ह्मणजे, ६ वेळा ७, आणि ७ वेळा ६. अ, ब, क, ड, ई, अशीं पांच खातीं आहेत, आणि त्यांतील प्रत्येक खात्याचा दुसऱ्या खात्याशीं व्यवहार आहे असें मनांत आण; आणि सर्व देणें उभ्ये ओळींत आणि सर्व घेणें आडव्ये ओळींत असें मांड. जसें पुढीलप्रमाणें;

॥  
॥ ० ० ० ०  
॥ ॥ ॥ ॥ ॥  
अ ब क ड ई

अ, धनको		२३	१९	३२	४
ब, ध०	१७		६	११	२५
क, ध०	९४१		१०	२	
ड, ध०	१४	२८	१६		३
ई, ध०	१५	४	६०	१	

यांत १६ या रकमेविषयीं डचा खात्यांत ड, कनें धनको आहे, आणि कचा खात्यांत त्याच रकमेविषयीं क, डला रिणको आहे. आणि रिणको आणि धनको बाजूंची बेरीज एकसारखीच असती, या ह्मणण्याचा अर्थ असा आहे, कीं वरचे अंकांची बेरीज उभ्ये किंवा आडव्ये ओळीनें केली तरी सारखीच होईल.

जर वर दाखविल्याप्रमाणें व्यवहारांची स्थिति आहे, आणि खातेवही पुरी करण्याची आहे, तर त्यांची स्थिति या पुढीलप्रमाणें होईल; त्यांत जें बारीक अक्षरांनीं लिहिलें आहे, त्याची समजूत पुढें होईल.



अ, रिणको.	अ, धनको.	ब, रिणको.	ब, धनको.
बला. . . . १७	बनें. . . . २३	अला. . . . २३	अनें. . . . १७
कला. . . . ९	कनें. . . . १९	कला. . . . ४१	कनें. . . . ६
डला. . . . १४	डनें. . . . ३२	डला. . . . २८	डनें. . . . ११
इला. . . . १५	इनें. . . . ४	इला. . . . ४	इनें. . . . २५
बाकीला. . . . २३			बाकीनें. . . . २७
—	—	—	—
७८	७८	९६	९६

क, रिणको.	क, धनको.	ड, रिणको.	ड, धनको.
अला. . . . १९	अनें. . . . ९	अला. . . . ३२	अनें. . . . १४
बला. . . . ६	बनें. . . . ४१	बला. . . . ११	बनें. . . . २८
डला. . . . १६	डनें. . . . १०	कला. . . . १०	कनें. . . . १६
इला. . . . ६०	इनें. . . . २	इला. . . . १	इनें. . . . ३
	बाकीनें. . . . ३९	बाकीला. . . . ७	
—	—	—	—
१०१	१०१	६१	६१

इ, रिणको.	इ, धनको.	बाकी, रिणको.	बाकी, धनको.
अला. . . . ४	अनें. . . . १५	बला. . . . ३७	अनें. . . . २३
बला. . . . २५	बनें. . . . ४	कला. . . . ३९	डनें. . . . ७
कला. . . . २	कनें. . . . ६०		इनें. . . . ४६
डला. . . . ३	डनें. . . . १	—	—
बाकीला. . . . ४६		७६	७६
—	—		
८०	८०		

वरचा कोष्टकांत जा वेगळाल्या रकमा एकदां मांडिल्या आहेत, त्या रकमा खालचा वेगळाल्या खात्यांमध्ये पुनः निरनिराळ्या मांडिल्या आहेत, असे दिसते. परंतु जेव्हां सर्व खातीं पुरीं होतात, आणि अधिक कांहीं रकमा मांडण्याचा नसतात, त्या वेळेस ही एक शेवटची कृति

मात्र रहाती, तिला खातेबाकी काढणें असें झणतात. ही कृति ध्यानांत येण्यासाठीं, मनांत आण, कीं एक नवा कारकून ठेविला आहे, जो सर्व खातीं पाहून खांतील सगळ्या रिणको आणि धनको रकमा काढून आपल्या स्वाधीन घेतो, आणि त्या खात्याबाबद देणें आणि घेणें याविषयीं सावकारास जिम्मेदार होतो. या नव्या कारकुनास बाकी काढणारा कारकून असें नाव देतात, आणि प्रत्येक खातें आपल्या जवळचें सर्व देणें किंवा घेणें त्याचे हवालीं करितें. झणजे, रोकडीचा कारकून आपल्या जवळची सर्व रोकड त्याचा हवालीं करितो; दोन जांतींचा हुंड्या बाळगणारे कारकून आपल्या जवळचा देण्याचा अथवा घेण्याचा हुंड्या\* त्याचा हवालीं करितात; निरनिराळ्या मालांचीं खातीं राखणारे कारकुनाजवळ जो माल विकल्यावांचून राहिलेला असतो, तो सर्व खरेदीचा दरानें हवालीं करितात; निरनिराळ्या पुरुषांचीं खातीं राखणारे कारकून त्या वेगळाल्ये पुरुषांकडून घेणें किंवा त्यांस देणें असेल, याविषयींचे आपल्या जवळचे दस्ताऐवज हवालीं करितात; याप्रमाणें पुढेहि. परंतु जेथें घेण्यापेक्षां देणें अधिक असतें, तेथें हा बाकी काढणारा कारकून त्याजवळून कांहीं न घेतां त्या खात्याचें देणें देऊन खातें पुरें करितो; सारांश जा खात्याचा तपास करण्याकरितां तो जातो, त्या खात्याचा रिणको आणि धनको बाजूंचा बेरिजा बरोबर होत असें करितो. उदाहरण, वर दाखविलेल्या अखात्यामध्ये अनें सावकाराला ५५ रुपये देणें आहे, आणि सावकाराला त्या खात्यानें ७८ रुपये दिले आहेत. यावरून तो बाकी काढणारा कारकून त्या खात्याचे रिणको बाजूस २३ मांडितो, झणजे तेणेंकरून त्या खात्यांत ती बाकी रिणको अशी होती, आणि बाकी खात्यांत ती रकम अचे नावावर धनको होती. परंतु ब खात्यांत ९६ जमा आहेत आणि त्याणें ५९ मात्र दिले आहेत. यावरून तो बाकी काढणारा कारकून त्या ब खात्यापासून ३७ घेतो, ते त्यांत धनकोकडे बाकी असें मांडून ती बाकी, बाकी खात्यांत बचे नावावर रिणको असें मांडितो. जर सर्व खातीं खरीं मांडलेलीं असलीं, तर बाकी खात्याचा दोन बा-

\* हिशोब घेतिसमयीं वेगळाल्ये खात्यांमध्ये प्रत्येक रकमेचे समोर जो पैका मांडिलेला असतो तो घेणें किंवा देणें कसाहि असो, तरी तो त्या रकमेबद्दल पैकाच आहे असें लक्षांत ठेवायें.

जुंचे रकमांचा बेरिजा बरोबर याव्या; कारण, खातावणीमध्ये सारख्या रकमा समोरा समोरचा बाजूस असतात, त्या जेव्हां परस्परांचे बरोबर होत नाहीत, तेव्हां त्यांतून एक रकम बाकी खात्याचा एक बाजूस जाती, आणि दुसरी रकम बाकी खात्याचा दुसऱ्या बाजूस जाती. यावरून सावकाराचे हिशोबाचा एक भागाचे खरेपणाविषयी हे बाकी खाते ताला आहे; जर त्या खात्याचा दोनही बाजूंचा रकमांचा बेरिजा सारख्या नसल्या, तर त्यांत कांहीं रकमा लिहून त्यांचा बरोबरीचा रकमाबरोबर मांडिल्या नसाव्या, अथवा बेरिजा घेण्यांत कांहीं चूक झाली असे समजावे.

परंतु जापेक्षां बाकी खात्याचा दोनही बाजूंचा बेरिजा सारख्या नेहमी असल्या, आणि जापेक्षां सावकारास घेणे आहे असे रिणको बाकीपासून, आणि त्यास लोकांचे देणे असे धनको बाकीपासून वाटते, असे जर वाटत आहे, तर जा व्यवहारांत हानी किंवा लाभ कांहींच झाला नसतो, त्यासच केवळ ही रीति लागू होती असे नजरेस येणार नाही कीं काय! यावरून जा पुंजीने सावकाराने व्यापार करण्यास आरंभ केला, आणि तीपासून जो लाभ किंवा हानी होती ती दोन जा खात्यांत मांडिलेली असतात, त्यांचा विचार करावा लागतो, तीं ही आहेत, हणजे पुंजी खाते, आणि लाभ हानी खाते. जी पुंजी व्यापाराचे आरंभी असती, तिची वहिवाट दुहेरी वहीप्रमाणे करायाची असेल, तर खातेवही घालण्याचे आरंभी, सावकार प्रत्येक कारकुनाचे हवाली त्याचे त्याचे काम अथवा खाते करितो, अशी कल्पना करावी. पुंजी खात्यांत पुंजी हणजे स्वतां सावकार आहे, असे समजून सर्व माल मत्तेने पुंजीखाते धनको आणि सर्व जिम्मेदारीने रिणको होतें; परंतु निरनिराळीं खाती पुंजीपासून जे काय घेतात, त्याजविषयी तीं रिणको होतात, आणि जी जिम्मेदारी घेतात तितक्याने तीं खाती धनको होतात. उदाहरण, खातेवही घालतेसमयी सावकाराची ५०० रुपये पुंजी आहे, अशी कल्पना कर. तर हे ५०० रुपये त्याने रोकडीचे कारकुनाचे हवाली केले असे दिसेल, आणि तेणेकरून पुंजीचे खात्यांत या पुढीलप्रमाणे दिसेल, हणजे, पुंजी ५०० रुपयांचे रोकडीने धनको; आणि रोकडीचे खात्यांत याप्रमाणे दिसेल, हणजे, रोकड ५०० रुपयांचे पुंजीला रिणको. मनांत आण, कीं आरंभी

५० रुपयांचें कर्ज मोतीराम यास द्यावयाचें राहिलें आहे, तर पुंजीचा खात्यांत या पुढीलप्रमाणें दिसेल, ह्मणजे, पुंजी मोतीराम याला ५० रुपयांविषयीं रिणको आहे, आणि मोतीरामाचे खात्यांत याप्रमाणें दिसेल, ह्मणजे, मोतीराम पुंजीनें ५० रुपयांविषयीं धनको आहे. याप्रमाणें पुंजी खातें ठेविलें असतां, जा पुंजीनें सावकार व्यवहार आरंभितो, त्याजविषयीं दुहेरी हिशोब होतात.

वह्यांतील जा रकमांचे समोर त्यांचे किमती बरोबरीचा रकमा दिसत नाहींत, त्या सर्व रकमा जा खात्यांत मांडिल्या असता, त्यास लाभ हानीं खातें ह्मणतात. हें लाभहानीं खातें, अथवा जो कारकून तें राखितो, तो प्रत्येक हानींविषयीं आणि प्रत्येक लाभाचा कारणाविषयीं जिम्मेदार आहे असें कल्पितात. ह्मणून हें खातें प्रत्येक हानींविषयीं रिणको आणि प्रत्येक लाभविषयीं धनको होतें; जर कांहीं माल ८० रुपयांस खरेदी घेतला आहे, आणि त्यास २० रुपयांची नुकसानी होऊन तो ६० रुपयांस विकला, तर स्पष्ट दिसेल, कीं याप्रमाणें मांडिलें पाहिजे, ह्मणजे, रोकड ६० रुपयांचे मालाला रिणको आणि माल ६० रुपये रोकडांनें धनको. आतां आरंभी सर्व मालाचे खरेदीविषयीं जो रोकड पैका किंवा हुंड्या दिल्या असतील, त्यांजविषयीं ८० रुपयांची रकम मालाला रिणको, अशी वहीत कोठें तरी असावी. ती जर लक्षांत आणली नाहीं, तर खात्याचे खरेपणांस बाध येईल; कारण खातें पुरें करण्याचेसमयीं, बाकी काढण्याच्या कारकुनाला हें कारण समजल्यावांचून जी रोकड त्यास मिळायामयोग्य दिसती, त्यापेक्षां २० रुपये कमी आहेत असें दिसेल; आणि यावरून दुहेरी वहिवाटवहीची योजना चालणार नाहीं. जापेक्षां मालाचा बाकी खात्यानें जो माल शिलक असेल तो दाखवून द्यावा. यावरून मालाचा खात्यानें २० रुपयांची जिम्मेदारी लाभहानीं खात्याकडे द्यावी अथवा या पुढीलप्रमाणें मांडावें हें सोईस पडेल, ह्मणजे, माल २० रुपये लाभहानीनें धनको, आणि लाभहानीं २० रुपयांचे मालाला रिणको. पुनः घरखर्च, आणि व्यापारसंबंधीं खर्च, वेतन इत्यादि, जा खर्चाबद्दल कांहीं परत येत नाहीं, त्या सर्व रकमांचीं खातीं बाकी काढण्याचे पूर्वी, लाभहानीं खात्यांत मांडून हिशोब पुरा केला पाहिजे; जसें, मनांत आण, कीं घरभाडें इत्यादिपासून जी मिळकत होती, तिजपेक्षां त्यासंबंधीं खर्च २०० रुपये

अधिक होतो, अथवा सावकाराचे घेण्यापेक्षां त्याचें देणें २०० रुपये अधिक होतें, तेव्हां अशा तऱ्हेचे खात्यावरची जिम्मेदारी काढून, लाभहानीं खात्याकडे नेऊन या पुढीलप्रमाणें त्या खात्याची खातेबाकी काढावी; ह्मणजे घरखर्च लाभहानीनें २०० रुपयांविषयीं धनको, आणि लाभहानीं घर खर्चाला २०० रुपयांविषयीं रिणको. अशा तऱ्हेनें पुढील वर्षाची खातेवही घालण्याविषयीं जा रकमा अगत्य असाव्या, त्यांशिवाय बाकीखात्यामध्ये दुसऱ्या कांहीं रकमा घेऊं नयेत, ह्मणून लाभहानीं खाते, बाकी खाते घालण्याचे पूर्वी वेळोवेळीं कामांत येतें.

कांहीं रकम एका खात्यांतून काढून दुसऱ्या खात्यांत नेणे, हें मोठें विचाराचें काम आहे. देण्याचे खात्याचे धनको रकमांविषयीं घेण्याचें खाते धनको होतें, आणि देण्याचे खात्याचे रिणको रकमांविषयीं घेण्याचें खाते रिणको होतें. यावरून रीति पुढीलप्रमाणें आहे; देण्याचे खात्याची खाते बाकी काढ, आणि जा बाजूस कांहीं बाकी रकम मांडावी लागती, ती बाकी रकम देण्याचे खात्यामध्ये, जसा पक्ष असेल त्याप्रमाणें घेण्याचे खात्याला रिणको, किंवा धनको मांड, आणि तीच रकम घेण्याचे खात्यामध्ये देण्याचे खात्याला रिणको किंवा धनको मांड. जसें अचे खात्यावरून रकम काढून बचे खात्यामध्ये मांडायाची आहे, आणि बचें खाते मात्र बाकी खात्यांत अणायचें आहे, असें मनांत आण. जर हीं दोन्ही खातीं पुढीलप्रमाणें असलीं, तर बारीक अक्षरांनीं जा रकमा लिहिल्या आहेत त्या मात्र हिशोब करण्याचे पूर्वी येतील.

अ, रिणको.	अ, धनको.	ब, रिणको.	ब, धनको.
किर्कोळीला १००	किर्कोळीने ५००	किर्कोळीला ६००	किर्कोळीने ४००
बला . . . . ४००		बाकीला . . २००	अने . . . . ४००
रुपये ५००	रुपये ५००	रुपये ८००	रुपये ८००

आणि शेवटीं बाकी खात्यांत याप्रमाणें मांडितात, बनें २०० रुपयांविषयीं धनको, आणि यावरून असें दिसतें, कीं या दोन खात्यांबाबद रिणको बाजूपेक्षां धनको बाजू २०० रुपयांनीं अधिक आहे.

तथापि बाकी खातें पुरें केल्याचे पूर्वी, लाभहानीं खातें, पुंजी खा-  
त्यांत नेलें पाहिजे; कां कीं या वर्षीचा लाभ आणि हानीं, दुसऱ्ये  
वर्षाची खातेवही घालतेसमयीं सावकाराची पुंजी किती आहे, हें त्यास  
समजावें याशिवाय दुसरा कांहीं उपयोग नाही. तर याप्रमाणें केल्या-  
वर, वर सांगितल्ये रितीनें बाकीखातें पुरें करितां येईल.

पुंजी खात्याची स्थिती केवळ लाभहानीं खात्यावरून फिरती, आणि हीं  
दोन्हीं खातीं पूर्वीचे खात्यांपेक्षां कांहीं विशेष तऱ्हेनें भिन्न आहेत, आणि बा-  
कीखातें हा एक सर्वांचा मध्यस्थ आहे. पुंजीखातें आणि लाभहानींखातें  
हीं दोन्हीं सावकाराचे ऐवजीं असतात; जें त्या खात्याचें हिताहित होतें, तेंच  
सावकाराचें हिताहित आहे; जर त्या खात्यांतील रिणको बाजूपेक्षां धनको  
बाजू अधिक असेल, तर तो दार आहे, आणि धनको बाजूपेक्षां रिणको  
बाजू अधिक आहे, तेव्हां तो नादार आहे. दुसऱ्ये सर्व खात्यांमध्ये ही गोष्ट  
उलटी असती. जर कोणी दुष्ट पुरुषाचे हातीं खतावणी सांपडली,  
आणि व्यवहाराची खरी स्थिति जशी असती, ती स्थिती खोटी करून  
दाखवायास इच्छितो, तर पुंजी आणि लाभहानींखातें, या दोन खा-  
त्यांचे रिणको बाजूकडील निरनिराळ्ये रकमेचे उजव्ये बाजूस एकएक  
शून्य देईल, आणि बाकी सर्व खात्यांमध्ये धनको बाजूस शून्य मांडील.  
यावरून लाभहानींखात्याचा हिशोब खात्यांत मांडल्यावर, काईम पुं-  
जीची रकम बाकीखात्याचा धनको बाजूस दितेल, आणि सावकारा-  
चें कर्ज त्याच बाजुवरहि दितें, जर त्याजवळ काईम पुंजी नसली, तर  
ती रकम पुंजी असें मानूं नये, परंतु ती नादारीची रकम आहे असें  
समजावें. परंतु बाकीखात्याचे रिणको बाजूस सावकाराचा सर्व ऐवज  
दिसतो, तो बाकी काढणाऱ्ये कारकुनानें दुसऱ्ये कारकुनापासून घेतला  
आहे, आणि तो कारकून त्याविषयी दुसऱ्या सर्व कारकुनांस रिणको आहे.

नव्ये शिकणारानें धनको आणि रिणको या शब्दांचे अर्थाशीं पक्कें  
माहित व्हावें हें अवश्यक आहे, आणि खर्डावहींतून वेगळाल्या रकमा  
योग्य खात्यांत योग्य बाजूस मांडण्यास शिकलें पाहिजे, कारण ही गोष्ट  
केवळ अभ्यासानें येती. वहिवाटवही विषयीचे ग्रंथ पढून समजायाम  
सहाय्य होईल, इतकें मात्र या पुस्तकांत सांगितलें आहे, त्या मोठ्या  
ग्रंथांत तरी केवळ उदाहरणांशिवाय दुसरें कांहीं बहुतकरून असत नाहीं  
असें त्याचे नजरेस येईल.

## पुरवणी भाग आठवा.

अपूर्णाकांचा किमतीचे जवळ जवळ असे दुसरे अपूर्णाक  
काढण्याविषयीं.

सांगीतल्ये अपूर्णाकाचे किमतीचे जवळजवळ अपूर्णाक काढा-  
याची एक फार उपयोगी रीति आहे, ती शिकणारास माहित असावी.  
सांगीतल्ये अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद यांचा दृढभाजक पूर्वी सांगी-  
तल्ये रितीप्रमाणे काढून, सर्व वेगळाले भागाकार एका ओळींत मांड.  
नंतर याप्रमाणे मांड,

१

दुसरा भागाकार

पहिला भागाकार

पहिला भागाकार × दुसरा भागाकार + १

नंतर तिसरा भागाकार घेऊन त्याने सांगीतल्ये दुसऱ्ये अपूर्णाकाचे  
अंश आणि छेद गुण, नंतर अंशाचे गुणाकारास त्याचे पूर्वीचे पदाचा  
अंश मिळीव, आणि छेदाचा गुणाकारास छेद मिळीव. अशाने तिसऱ्ये  
अपूर्णाकाचे अंश आणि छेद उत्पन्न होतील. चवथा भागाकार घेऊन  
तिसऱ्ये आणि दुसऱ्ये अपूर्णाकांपासून चवथा अपूर्णाक उत्पन्न कर; आ-  
णि याप्रमाणे सर्व भागाकार संपतपर्यंत कृति कर. उदाहरण,  $\frac{११३१}{१३१२८}$   
हा अपूर्णाक घे.

११३१) १३१२८ (१, २      ११३१ आणि १३१२८ यांचा दृढ-  
११३७    ३९९७ (३, १    भाजक काढण्याची अति संक्षेप कृति  
५५१    ५८६ (१, १५    बाजूवर दाखविली आहे, आणि त्यांचे  
२०१    ३५ (१, २    भागाकार आणि अपूर्णाक हे पुढील  
२६    ९ (१, ८    आहेत.  
८    १

१   २   ३   १   १   १५   १   २   १   ८ भागाकार,

$\frac{१}{१}$     $\frac{२}{३}$     $\frac{७}{१०}$     $\frac{९}{१३}$     $\frac{१६}{२३}$     $\frac{२४९}{३५८}$     $\frac{२६५}{३८१}$     $\frac{७७}{११२०}$     $\frac{१०४४}{१५०१}$     $\frac{११३१}{१३१२८}$  अपूर्णाक.

हा एक अपूर्णाकांचा समुदाय आहे, आणि त्यांतील शेवटचा अपू-

र्णांक दिलेला अपूर्णांक आहे, आणि हे अपूर्णांक वर सांगितल्ये कृती-प्रमाणे खाली काढून दाखविले आहेत;

$$\text{पहिला अपूर्णांक} = \frac{1}{\text{पहिला भागाकार}} = \frac{1}{1}$$

$$\text{दुसरा अपूर्णांक} = \frac{\text{दुसरा भागाकार}}{\text{पहिला भागाकार} \times \text{दुसरा भागाकार} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{तिसरा अपूर्णांक} = \frac{\text{दुसऱ्याचा अंश} \times \text{तिसरा भागाकार} + \text{पहिल्याचा अंश}}{\text{दुसऱ्याचा छेद} \times \text{तिसरा भागाकार} + \text{पहिल्याचा छेद}} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 \times 3 + 1} = \frac{7}{10}$$

$$\text{चवथा अपूर्णांक} = \frac{\text{तिसऱ्याचा अंश} \times \text{चवथा भागाकार} + \text{दुसऱ्याचा अंश}}{\text{तिसऱ्याचा छेद} \times \text{चवथा भागाकार} + \text{दुसऱ्याचा छेद}} = \frac{7 \times 4 + 2}{10 \times 4 + 3} = \frac{30}{43}$$

आणि याप्रमाणे पुढेहि. परंतु भागाकाराचे योगाने मुळचा अपूर्णांकावर, केवळ तर्कापेक्षां कांहीं अधिक कृति केली आहे.  $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{30}{43}$ , इत्यादि अपूर्णांकांचा समुदाय मुळचे अपूर्णांकाचे किमती जवळ जवळ येत जातो, ह्मणजे दिलेल्या अपूर्णांकापेक्षां पहिला अपूर्णांक फार मोठा आहे, दुसरा अपूर्णांक फार लहान आहे, तिसरा फार मोठा आहे, आणि याप्रमाणे अनुक्रमाने आहेत, परंतु प्रत्येक अपूर्णांक त्याचे पूर्वीचे अपूर्णांकापेक्षां दिलेल्या अपूर्णांकाचे अधिकजवळजवळ होत जातो. जसे,  $\frac{1}{1}$  हा फार मोठा आहे, आणि  $\frac{2}{3}$  हा फार लहान आहे; परंतु  $\frac{7}{10}$  हा दिलेल्या अपूर्णांकापेक्षां जितका मोठा आहे, तितका  $\frac{30}{43}$  लहान नाही. आणि  $\frac{30}{43}$  हा जरी फार मोठा आहे, तरी  $\frac{7}{10}$  हा जितका दिलेल्या अपूर्णांकापेक्षां लहान आहे, तितका तो मोठा नाही.

आणखी, मूळचा अपूर्णांकाचे आणि यांतून कोणत्याहि अपूर्णांकाचे अंतर, एका अपूर्णांकापेक्षां कधीहि अधिक असत नाही, त्या अपूर्णांकाचे अंशस्थळी एक येतो, आणि वजा केलेल्या अपूर्णांकाचा छेद आणि त्याचे पुढल्ये अपूर्णांकाचा छेद यांचा गुणाकार छेदस्थळी येतो. जसे,  $\frac{1}{1}$  याचे दिलेल्या अपूर्णांकाशी  $\frac{2}{3}$  इतके अंतर नाही,  $\frac{2}{3}$  याचे  $\frac{7}{10}$  इतके अंतर नाही,  $\frac{7}{10}$  याचे  $\frac{30}{43}$  इतके अंतर नाही,  $\frac{30}{43}$  याचे  $\frac{7}{10}$  इतके अंतर नाही, याप्रमाणे पुढेहि.

शेवटीं या समुदायातील कोणताहि अपूर्णांक दिलेल्या अपूर्णांकाज-



वळ जितका येतो, तितका लहान अंश छेदाचा अपूर्णांक जवळ येत नाही. जसे,  $\frac{२४९}{३५८}$  हा अपूर्णांक  $\frac{९१३१}{१३१२८}$  याचे जवळ जितका येतो, तितका दुसरा कोणताहि अपूर्णांक जाचा अंश २४९ पेक्षां कमी, आणि जाचा छेद ३५८ पेक्षां कमी, असा अपूर्णांक जवळ येत नाही.

शिकणारानें हवीं तीं उदाहरणें घ्यावीं, आणि जा अपूर्णांकापासून प्रारंभ केला असतो, तो अपूर्णांक शेवटीं आल्यावर कृतीचा खरेपणाचा ताळा सांपडतो. याच गोष्टीचा दुसऱ्या तऱ्हेचा ताळा यापुढीलप्रमाणें आहे. उत्पन्न झालेल्या अपूर्णांकाचे समुदायांतील जवळजवळचे कोणतेहि दोन अपूर्णांकांचे वजाबाकीचा अंश १ असावा. जसें, वर केलेल्या उदाहरणांत  $\frac{१६}{२३}$  आणि  $\frac{२४९}{३५८}$  यांस समछेद केल्यावर, त्यांचे अंश ५७२८ आणि ५७२७ आहेत, आणि त्यांचा समछेद  $२३ \times ३५८$  आहे.

दुसऱ्या उदाहरणासाठीं हा पुढील प्रश्न घेतों; वर्षाची लांबी ३६५.२४२२४ दिवस आहे, तिला व्यवहारांत ३६५  $\frac{१}{१०००००}$  दिवस असें घेतात. ह्यापून वरचा अपूर्णांक  $\frac{२४२२४}{१०००००}$  घे, आणि रितीप्रमाणें कर.

$$२४२२४ ) १००००० ( ४, ७, १, ४, ९, २$$

$$२४९६ \quad ३१०४$$

$$६४ \quad ६०८$$

$$० \quad ३२$$

$$\frac{१}{४} \quad \frac{७}{२९} \quad \frac{८}{३३} \quad \frac{३९}{१६१} \quad \frac{३५९}{१४८२} \quad \frac{७५७}{३१२५}$$

आणि २४२२४ याचे अति जवळचा अपूर्णांक  $\frac{७५७}{३१२५}$  आहे. यावरून जी एक वर्षाची कसर ३६५ दिवसांचे वर आहे, ती सुमारे ४ वर्षांत १ दिवसा इतकी होती, आणि अज्ञानें जी ही चूक येती ती ११६ वर्षांनीं एक दिवसा इतकी होत नाही; याहून सूक्ष्मपणानें पाहिलें असतां, २९ वर्षांत ७ दिवस घेतले, तर जी चूक होती ती ९५७ वर्षांत १ दिवसा इतकी होत नाही; आणि याहून अधिक सूक्ष्मपणानें पाहिलें असतां ३३ वर्षांत आठ दिवस घेतले तर जी चूक येती, ती ५३१३ वर्षांत एक दिवसा इतकी होत नाही, आणि याप्रमाणें पुढेहि.

कोणतेहि अपूर्णांकाचे वर्गमुळाचे बरोवरी जवळ जवळ असा अपूर्णांक काढण्यास, वरची रीति याप्रमाणें लावितां येईल;

$$\sqrt{४३} = ६ + \dots$$

जा अंकाचें वर्गमूळ काढाव-

$$\begin{array}{r|l} ६ | १५४५५४५१६६ & १५४ \text{ इत्या० याचें असेल, तो अंक मांड,} \\ १ | ७६३९२९३६७१ & ७६३ \text{ इ० जसें, ४३. याचें वर्गमूळ ६} \\ \hline ६ | ११३१५१३१११२ & ११३ \text{ इ० आणि कांहीं अपूर्णांक आहे.} \end{array}$$

६ हा पूर्णांक पहिल्या आणि तिसऱ्या आडव्या ओळीचे आरंभीं मांड, आणि १ हा अंक नेहमीं दुसऱ्या ओळीचे आरंभीं मांड. नंतर पुढें दाखविल्याप्रमाणें मागव्या उभे ओळीपासून पुढील उभी ओळ सिद्ध कर;

पहिली ओळ व, अ, क, या क्रमानें दुसरी ओळ उत्पन्न करितात.

अ अ=अचेवरची वक ची कसर.

व व=४३-अ भागिले व याचा भागाकार.

क क=६+अ भागिला व याचे भागाकारांतील पूर्णांक.

यावरून दुसरी ओळ या पुढीलप्रमाणें करितात;

$$६ | १ = ६ \text{ वरची } ७ \times १ \text{ यांची कसर, } ७ \text{ आणि } १ \text{ हे वर काढले.}$$

$$१ | ७ = ४३ - ६ \times ६ \text{ भागिला } १.$$

$$६ | १ = ६ + ६ \text{ भागिले } ७ \text{ यांचे भागाकारांतील पूर्णांक.}$$

यावरून तिसरी ओळ या पुढीलप्रमाणें होईल;

$$१ \quad ५ = १ \text{ वरची } १ \times ६ \text{ यांची कसर.}$$

$$७ \quad ६ = ४३ - १ \times १ \text{ भागिले } ७.$$

$$१ \quad १ = ६ + १ \text{ भागिले } ६ \text{ या भागाकारांतील पूर्णांक.}$$

आणि याप्रमाणें पुढेंहि. अशी कृति करीत असतां १, ७, १, ही दुसरी उभी ओळ पुनः येता, आणि त्यानंतर दुसऱ्या उभ्या ओळी अनुक्रमानें येतात. शेवटची कृति करायासाठीं तिसऱ्या आडव्या ओळींतील पहिला ६ हा अंक सोडून बाकीचे १, १, ३, १, ५, १, ३, इत्यादि-अंक घे, आणि या कलमाचे आरंभीं सांगितलेली रीति पुढें दाखविल्या प्रमाणें त्या अंकांस लाव;

१	१	३	१	५	१	३	१	१	इत्यादि
$\frac{१}{१}$	$\frac{१}{२}$	$\frac{४}{७}$	$\frac{५}{२}$	$\frac{२९}{५२}$	$\frac{३४}{६१}$	$\frac{१३१}{२३५}$	$\frac{१६५}{२२६}$	$\frac{२९६}{५३१}$	

यावरून ४३ सांचे वर्गमूळाचे जवळ  $६\frac{१६५}{२९६}$  आहेत, आणि यांपासून  $\frac{१}{२९६ \times ५३१}$  इतकी चूक येत नाही.

जर कृति केली, तर  $६\frac{१६५}{२९६}$  हे  $\frac{१९४१}{२९६}$  आहेत, आणि यांचा वर्ग  $\frac{३७६७४८१}{८७६१६}$ , अथवा  $४३ - \frac{७}{८७६१६}$  आहे.

जेव्हा कांहीं एक वर्गमूळ वारंवार घेण्याचें असतें, तेव्हां ही रीति कामांत आणितात, आणि यावरून जवळ जवळ होई असा कांहीं व्यवहारी अपूर्णांक आहे कीं नाहीं हें जाणायचें असतें.

उदाहरण,  $\sqrt{२}$  यांची गरज वारंवार लागते.

$$\sqrt{२} = १ + \dots$$

$$१ \overline{) ११}$$

$$१ \overline{) ११}$$

$$१ \overline{) २२ \ २ \ २ \ २ \ २}$$

$$\frac{१}{२} \frac{२}{५} \frac{५}{१२} \frac{१२}{२९} \frac{२९}{७०} \frac{७०}{१६९} \text{ इत्या० }$$

येथें असें दिसतें कीं  $१\frac{२९}{७०}$  या-

पासून  $\frac{१}{७० \times १६९}$  इतकी चूक होत नाही; यामुळे  $\frac{२९}{७०}$  अथवा  $\frac{१००-१}{७०}$

हा जवळचा अपूर्णांक आहे. आ

णि यापासून कृति करण्यास

कार सोपें पडेल. सारांश  $\frac{९९}{७०}$  हे,  $१.४१४२८५७$  आहेत, परंतु खरे अंक  $१.४१४२१३५ \dots$  आहेत.

हें पुढील एक दुसरें उदाहरण आहे.

$$\sqrt{१९} = ४ + \dots$$

$$४ \overline{) २३३२४४२}$$

$$१ \overline{) ३५२५३१३}$$

$$४ \overline{) २१३१२८२१३१२, इ०}$$

$$\frac{१}{२} \frac{१}{३} \frac{४}{११} \frac{५}{१४} \frac{१४}{३९} \text{ इत्या० }$$

## पुरवणी भाग नववा.

### अंकांचे साधारण गुणांविषयी.

पहिलें कृत्य. जर अपूर्णांकास अति संक्षेपरूप दिलें, ह्मणजे, जर त्या अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद एकापेक्षां मोठ्ये अंकानें भागिले जात नाहीत, तर त्यापेक्षां लहान अंश आणि छेदाचे अपूर्णांकाची किंमत त्या अपूर्णांका इतकी होणार नाही.

$\frac{अ}{ब}$  असा अपूर्णांक घे, आणि मनांत आण कीं, अ आणि ब यांस एकौशिवाय दुसरा दृढभाजक नाही; आणि जर शक्य असेल, तर त्या अपूर्णांकाचे किमतीचा अपूर्णांक  $\frac{क}{ड}$  आहे, आणि त्यांत अ पेक्षां क लहान आहे, आणि ब पेक्षां ड लहान आहे असे मनांत आण. आतां जापेक्षां  $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ , तर  $\frac{अ}{क} = \frac{ब}{ड}$ ; आतां जापेक्षां अ > क, आणि ब > ड, तर या मागल्या दोन अपूर्णांकांतील अंश त्यांचे त्यांचे छेदानें भागिले असतां भागाकारांत कांहीं पूर्णांक येईल, तो पूर्णांक दाखवायाकरितां म घे, आणि त्यांचा वाक्या दाखवायासाठीं इ आणि फ घे. तर

$$\frac{अ}{ब} \text{ अथवा } \frac{मक+इ}{मड+फ} = \frac{क}{ड} = \frac{मक}{मड}$$

यावरून,  $\frac{इ}{फ}$  आणि  $\frac{मक}{मड}$  हे दोन्हीं बरोबर असावे, जर ते बरोबर नसतील, तर  $\frac{मक+इ}{मड+फ}$  हा अपूर्णांक  $\frac{मक}{मड}$  याचे बरोबर होणार नाही, परंतु तो  $\frac{मक}{मड}$  आणि  $\frac{इ}{फ}$  या दोन अपूर्णांकांचेमध्ये येईल. यावरून,  $\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}$ ; ह्मणून जा अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद यांस एकापेक्षां मोठा दृढभाजक नाही, तो अपूर्णांक जर लहान अंश आणि छेदाचे अपूर्णांकाबरोबर होईल, तर अधिक लहान अंश आणि छेदाचे अपूर्णांकाबरोबर तो पहिला अपूर्णांक होईल. जर  $\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}$ , यांशीं वरचेसारखी कृति केली, तर  $\frac{अ}{ब} = \frac{ग}{ह}$  होईल, त्यांत ग < इ, ह < फ आहे, आणि याप्रमाणें पुढींही आतां, जर कांहीं अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद प्रत्येक पायरीस एक किंवा अनेक एकमांणीं कमी करणारी अशी कृति चालविली असतां, शेवटीं त्या अपूर्णांकाचे अंश अथवा छेद अथवा ते दोन्हीं शून्याबरोबर होतील.  $\frac{अ}{ब} = \frac{वि}{व}$  ही एक कृति आहे अशा कल्पना कर, आणि अ = कवि + क्ष, आणि ब = कव + य, असे घे; यावरून  $\frac{कवि+क्ष}{कव+य} = \frac{वि}{व}$ . आतां जर क्ष = ० आणि यला कांहीं किंमत आहे असे मानणें अशक्य, कां कीं त्यापासून  $\frac{कवि}{कव+य} = \frac{कवि}{कव}$  असें खोटें उत्तर येतें. जर क्षला कांहीं किंमत आहे, आणि य = ० असें असलें, तर वरचे सारिखेंच खोटें उत्तर येईल; आणि जर क्ष आणि य हे दोन्हीं शून्याबरोबर असतील, तर अ = कवि आणि ब = कव, अथवा अ आणि ब यांचा साधारण भाजक क आहे. आतां १ पेक्षां क अधिक असावा, कां कीं,

वि आणि व हे क आणि ड पेक्षां कमी आहेत, आणि प्रतिज्ञेप्रमाणें क आणि ड हे अ आणि ब यांपेक्षां कमी असावे. यामुळे अ आणि ब यांस १ पेक्षां अधिक असा दृढभाजक क आहे, परंतु प्रतिज्ञेप्रमाणें त्यांस १ पेक्षां मोठा भाजक नाही. यावरून जर, अ आणि ब हे पूर्णांक १ पेक्षां मोठे पूर्णांकाने भागिले जात नाहीत, तर  $\frac{अ}{ब}$  हे अपूर्णाकाचे अतिसंक्षेपरूप अवश्य आहे, आणि अ आणि ब हे परस्पर अविभाज्य आहेत.

**दुसरे कृत्य.** जर अब हा गुणाकार कने भागिला जातो, आणि जर बने क अविभाज्य आहे, तर अला क भागील.  $\frac{अब}{क} = ड$  असे घे, तर  $\frac{ब}{क} = \frac{ड}{अ}$ . आतां  $\frac{ब}{क}$  हे अतिसंक्षेपरूप आहे; यावरून, मागव्ये कृत्याप्रमाणें, ड आणि अ यांस साधारण भाजक असावा. तो साधारण दृढभाजक के आहे, आणि अ = केल, आणि ड = केम असे घे. तर  $\frac{ब}{क} = \frac{केम}{केल} = \frac{म}{ल}$ , आणि  $\frac{म}{ल}$  अति संक्षेपरूपांत आहे; परंतु  $\frac{ब}{क}$  हि अतिसंक्षेपरूपांत आहे; यावरून म = ब, आणि ल = क, असें असावे, कारण असें नसल्यास एक अति लहान संक्षेपरूप पदांचा अपूर्णांक, त्यापेक्षां अधिक लहान संक्षेपरूप पदांचे अपूर्णाकावरोवर होईल. यावरून अ = केक, अथवा कने अ भागिला जातो. आणि यावरून असें सिद्ध होतें कीं, जर एक संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांनीं अविभाज्य असेल, तर ती त्या दोन संख्यांचे गुणाकारानेहि अविभाज्य होईल. ब आणि क याने अ अविभाज्य आहे, असें मनांत आण, तर अचा कोणताहि भाजक, ब अथवा क यांस भागणार नाही, आणि तो भाजक, बक या गुणाकारासहि भागणार नाही; कारण बकचा जो भाजक त्यांतून एकाने अविभाज्य आहे, तो दुसऱ्याला भागील.

**तिसरे कृत्य.** जर बने अ अविभाज्य आहे, तर तो बचा सर्व घातांनाहि अविभाज्य आहे. अचा प्रत्येक भाजक बने अविभाज्य आहे, आणि यामुळे बला तो भागीत नाही. ह्मणून, वर सांगितल्याप्रमाणें, अचा कोणत्याहि भाजकाने  $ब^२$  भागिला जात नाही. यावरून  $ब^२$  याणें अ अविभाज्य आहे, आणि याप्रमाणें अचा प्रत्येक भाजकहि भागीला जात नाही; यामुळे अचा कोणताहि भाजक  $बब^२$  यास भागीत नाही, यामुळे  $ब^३$  ने अ अविभाज्य आहे. आणि याप्रमाणें पुढेहि.

यावरून, जर व नें अ अविभाज्य आहे, तर वचा कोणत्याहि घाताला अ निःशेष भागीत नाही. याच कारणावरून जर कोणतेहि अपूर्णाकाचा छेद २ आणि ५ यांशिवाय दुसरे कांणतेहि अविभाज्य अंकांनै भागिला जात नाही, तर तशा छेदाचे अपूर्णाकाशिवाय दुसऱ्या अपूर्णाकास दशांशरूप देण्याचें अशक्य. कां कीं जर  $\frac{अ}{व} = \frac{क}{१०न}$ , यांतून  $\frac{क}{१०न}$  हें दशांश अपूर्णाकाचें साधारणरूप आहे, तर  $\frac{अ}{व}$  अतिसंक्षेप रूपांत आहे असें मनांत आण ; तर  $\frac{१०नअ}{व}$  हा पूर्णांक आहे, यावरून दुसऱ्या कृत्याप्रमाणें वनें १०<sup>न</sup> भागिला जावा, आणि त्याचप्रमाणें व चा सर्व भाजकांनींहि भागिला जावा. यावरून जर व चा भाजकामध्ये २ आणि ५ यांशिवाय दुसरे कांहीं अविभाज्य अंक असले, तर या कृतीत १० स भागीत नाही, असा एक अविभाज्य अंक आहे, आणि तो १० चा एकाद्या घातास भागितो हें अशक्य आहे.

**चवथे कृत्य.** जर अनें व अविभाज्य आहे, तर व, २व, ... (अ-१)व इत्यादि व चा गुणितांस अनें भागिले असतां निरनिराळ्या बाक्या रहातील. कां कीं जर न पेशां म मोठा असेल, आणि हे दोन्हीहि अपेक्षां लहान असतील, तर मव आणि नव यांपासून सारख्याच बाकी निघेल, यावरून मव-नव, अथवा (म-न)व यास अ निःशेष भागितो; यावरून (दुसरे कृत्या) प्रमाणें, म-न यास अ निःशेष भागितो, क्षणजे लहान अंकास मोठा अंक भागितो हें अशक्य आहे.

जर कांहीं संख्येचे अविभाज्य अंकांनीं गुण्यगुणकरूप विभाग केले, अथवा तीस केवळ अविभाज्य अंकांचे गुणाकाराचें रूप दिलें, (जसें ३६० = २ × २ × २ × ३ × ३ × ५), आणि जर हे अविभाज्य अंक दाखविण्यास अ, व, क, इत्यादि घेतले, आणि जितक्या वेळा हे अविभाज्य अंक येतात, तो वेळांक दाखविण्यास अ, व, क, इत्यादि घेतले, तर ती संख्या अ<sup>अ</sup> × व<sup>व</sup> × क<sup>क</sup> इत्यादि अशी होईल, तर ही गोष्ट केवळ एक तऱ्हेनें मात्र होईल; कां कीं कोणताहि अविभाज्य अंक व, वर दाखविल्याप्रमाणें गुणकांत येत नाही, तर तो अनें अविभाज्य आहे, आणि यामुळे अ<sup>अ</sup> नें भागिला जात नाही, वनें अविभाज्य आहे, आणि यामुळे व नेंहि अविभाज्य आहे, आणि यामुळे अ<sup>अ</sup> × व<sup>व</sup> नें अविभाज्य आहे. याप्रमाणें चालले असतां सर्व गुणाकार अथवा दिलेल्या संख्येनें व अविभाज्य आहे असें सिद्ध करितां येईल.

वर सांगितलेल्या अ<sup>अ</sup> ब<sup>ब</sup> क<sup>क</sup> ... इत्यादि अशा संख्येचे भाजकांची संख्या  $(अ+१)(ब+१)(क+१) \dots$  आहे, आणि यांत ० आणि ती मूळ संख्या यांचाहि संग्रह होतो. कां कीं अ<sup>अ</sup> याचे भाजक १, अ, अ<sup>२</sup> ... अ<sup>अ</sup> इत्यादि सर्व मिळून अ+१ इतके आहेत, यांशिवाय दुसरे नाहीत. याचप्रमाणे ब<sup>ब</sup> याचे भाजकांची संख्या ब+१ आहे, आणि याप्रमाणे पुढेहि. आतां प्रत्येक जातींतून एक एक घेऊन त्या सर्वांचे गुणाकाराने दिलेल्या संख्येचे भाजक निघतात, यावरून त्यांची संख्या १० व्या पुरवणीप्रमाणे  $(अ+१)(ब+१)(क+१) \dots$  आहे.

जर, ३, ५, ७, ११, इत्यादि यांतून कोणत्याहि अविभाज्य अंकांनीं कांहीं न संख्या निःशेष भागिली जाती, तर नपर्यंत सर्व संख्यांचा तिसरा भाग ३ नीं निःशेष भागिला जातो, त्यांचा पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि याप्रमाणे पुढेहि. परंतु याशिवाय अधिकहि घडतें; जेव्हां ३ चीं गुणितें सोडिलीं असतात, तेव्हां जा बाक्या रहातात त्यांचा बरोबर पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो; कां कीं सगळ्यांचा पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि जे अंक वेगळे केलेले असतात त्यांचाहि पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो, यावरून जे बाकी रहातात त्यांचा पांचवा भागहि ५ नीं निःशेष भागिला जाईल. पुनः सर्वांचा सातवा भाग ७ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि जे ३ नीं अथवा ५ नीं अथवा १५ नीं निःशेष भागिले जातात, त्यांचा सातवा भागहि ७ नीं निःशेष भागिला जातो, यावरून ३ अथवा ५ अथवा ते दोन्ही यांचीं सर्व गुणितें वेगळीं काढून जे बाकी रहातात, त्यांचा सातवा भाग ७ नीं निःशेष भागिला जातो; आणि याप्रमाणे पुढेहि. यावरून ३, ५, ७, अथवा ११ नीं निःशेष भागिल्या जात नाहीत, अशा अंकांची न पेशां कमी संख्याही पुढील आहे, नचे  $\frac{३}{३}$  चे  $\frac{५}{५}$  चे  $\frac{७}{७}$  चे  $\frac{११}{११}$ . याचप्रमाणे चाललें असतां असें दिसतें, कीं जा संख्या नवें अविभाज्य आहेत, त्यांची संख्या, ह्मणजे जा अ, ब, क, ... इत्यादि नचे अविभाज्य गुण्यगुणकांनीं निःशेष भागिल्या जात नाहीं, त्यांची संख्या या पुढीलप्रमाणे आहे.

$\frac{अ-१}{अ} \frac{ब-१}{ब} \frac{क-१}{क} \dots$  अथवा अ<sup>अ-१</sup> ब<sup>ब-१</sup> क<sup>क-१</sup> ...  $(अ-१)(ब-१) \times (क-१) \dots$

जसे, ३६० हे  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ , आहेत, त्यांचे भाजकांची संख्या  $8 \times 3 \times 2$ , अथवा २४ आहे, आणि ३६० ला अविभाज्य अशा ३६० पेक्षां  $2^2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 8$  अथवा ९६ संख्या कमी आहेत.

**पांचवें कृत्य.** जर वनें अ अविभाज्य असेल, तर अ, अ<sup>२</sup>, अ<sup>३</sup>, ... इत्यादि श्रेणीचीं पदे वनें भागिलीं, तर १ बाकी राहीपर्यंत निरनिराळ्या बाक्या येतील, आणि १ बाकी आल्यानंतर बाक्यांचा क्रम पूर्वीसारखा अनुक्रमाने फिरून येऊं लागेल.

अ ÷ ब यापासून र बाकी निघती, परंतु एथें र एका बरोबर नाही; तर अ<sup>२</sup> ÷ ब यापासून जी बाकी निघती, ती रअ ÷ ब याचे बाकी बरोबर आहे, परंतु ती बाकी (चवथे कृत्याप्र०) र नाही; ह्मणून ती स आहे असें मनांत आण. तर अ<sup>३</sup> ÷ ब यापासून जी बाकी निघती, ती सअ ÷ ब याचे बरोबर आहे, आणि १ याचे बरोबर स नसेल, तर ही बाकी (चवथे कृत्याप्र०) र, अथवा स, यांचे बरोबर होऊं शकणार नाही; ती बाकी दाखवायास ट घे. तर अ<sup>४</sup> ÷ ब यापासून जी बाकी निघती, ती टअ ÷ ब याचे बरोबर आहे; जर १ याचे बरोबर ट नसेल, तर ही बाकी र, स, अथवा ट, यांचे बरोबर होऊं शकणार नाही; ती बाकी दाखविण्यास य, घे. याप्रमाणें जोंपर्यंत १ ही बाकी येईतोंपर्यंत निरनिराळ्या बाक्या काढीत जावें; नंतर पुढल्ये कृतींत अ ÷ ब याची जी बाकी पूर्वी आलेली असती, तीच पुनः येती. आतां कोठे तरी १ ही बाकी यावी; कां कीं वनें भागिले असतां ०, १, २, ... ब-१ यांशिवाय दुसऱ्या कांहीं बाक्या येत नाहीत; आणि (तिसऱ्ये कृत्याप्र०) ० कधीं येत नाही, यावरून जेव्हां ब-२ इतक्या निरनिराळ्या बाक्या आल्या असतात, आणि त्यांतून एकहि बाकी १ बरोबर नसती, तेव्हां पुढली बाकी दुसऱ्या पूर्वीचा सर्व बाक्यांहून भिन्न असावी, ह्मणून ती १ असावी. जर पूर्वी १ ही बाकी आली नसती, तर अ<sup>ब-१</sup> यापासून १ ही बाकी यावी; आणि यानंतर बाक्यांचा क्रम फिरावा हें अवश्य आहे.

जसे, ७, ७<sup>२</sup>, ७<sup>३</sup>, ७<sup>४</sup>, इत्यादि यांस ५ नीं भागिले असतां २, ४, ३, १, इत्यादि बाक्या येतील असें दिसेल.

**सहावें कृत्य.** दोन मघातांचें अंतर त्यांचे मूळांचे अंतराने निःशेष



भागिलें जातें; अथवा  $\text{अ}^{\text{म}}-\text{व}^{\text{म}}$  हे अ-व याणें निःशेष भागिले जातात, कां कीं

$$\text{अ}^{\text{म}}-\text{व}^{\text{म}} = \text{अ}^{\text{म}} - \text{अ}^{\text{म}-1}\text{व} + \text{अ}^{\text{म}-1}\text{व} - \text{व}^{\text{म}} = \text{अ}^{\text{म}-1}(\text{अ}-\text{व}) + \text{व}(\text{अ}^{\text{म}-1} - \text{व}^{\text{म}-1})$$

यांतून जर  $\text{अ}^{\text{म}-1}-\text{व}^{\text{म}-1}$  हे अ-व याणें निःशेष भागिले जातात तर  $\text{अ}^{\text{म}}-\text{व}^{\text{म}}$  हि निःशेष भागिला जातो. परंतु अ-व याणें अ-व निःशेष भागिला जातो; यावरून  $\text{अ}^2-\text{व}^2$  हि निःशेष भागिला जातो;  $\text{अ}^3-\text{व}^3$  हि निःशेष भागिला जातो; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

यामुळें जर अ आणि व यांस कर्ने भागिलें असतां बाकी सारिखीच राहील, तर  $\text{अ}^2$  आणि  $\text{व}^2$ ,  $\text{अ}^3$  आणि  $\text{व}^3$  इत्यादि वेगवेगळे कर्ने भागिले असतां सारिख्याच बाक्या राहतील; कां कीं याचा अर्थ असा होतो कीं कर्ने अ-व निःशेष भागिला जातो. परंतु  $\text{अ}^{\text{म}}-\text{व}^{\text{म}}$  यांस अ-व निःशेष भागितो, आणि यामुळें अ-व याचा प्रत्येक भाजक अथवा कहि निःशेष भागितो; परंतु  $\text{अ}^{\text{म}}$  आणि  $\text{व}^{\text{म}}$  यांस कर्ने भागून जर सारख्या बाक्या राहात नाहींत, तर  $\text{अ}^{\text{म}}-\text{व}^{\text{म}}$  यांस क निःशेष भागणार नाहीं.

सातवें कृत्य. जर व अविभाज्य अंक आहे, आणि वनें अ निःशेष भागिला जात नाहीं, तर  $\text{अ}^{\text{व}}$  आणि  $(\text{अ}-१)^{\text{व}}+१$  यांस वनें भागिलें असतां सारिख्याच बाक्या राहातात. हें कृत्य येथें सिद्ध करून दाखवितां येत नाहीं, कां कीं या ग्रंथापासून जितकें विजगणीताचें ज्ञान होतें, त्यापेक्षां हें कृत्य समजण्यास विशेष ज्ञान असलें पाहिजे.

आठवें कृत्य. वरचे पक्षांत  $\text{अ}^{\text{व}-1}$  यास वनें भागिलें असतां १ बाकी रहाती. मागव्ये कृत्यावरून  $\text{अ}^{\text{व}}-\text{अ}$  यापासून जी बाकी निघती, ती  $(\text{अ}-१)^{\text{व}}-१-\text{अ}$ , अथवा  $(\text{अ}-१)^{\text{व}}-(\text{अ}-१)$  याचे बाकी बरोबर असती; ह्मणजे अतून १ कमी केला तरी  $\text{अ}^{\text{व}}-\text{अ}$  याचे बाकींत कांहीं फेर पडत नाहीं. त्याच रितीप्रमाणें, त्यांतून दुसरा एक कमी करितां येईल, आणि याप्रमाणें पुढें केलें असतां बाकीमध्ये कांहीं अंतर पडत नाहीं. शेवटीं त्याचें रूप  $१-१$ , अथवा ० असें होतें, आणि त्यापासून ० ही बाकी येती. यावरून  $\text{अ}^{\text{व}}-\text{अ}$ , अथवा  $\text{अ}(\text{अ}^{\text{व}-1}-१)$  यास व निःशेष भागितो; आणि जापेक्षां अने व अविभाज्य आहे, यावरून (दुसरे कृत्याप्र०)  $\text{अ}^{\text{व}-1}-१$  यास व भागील; ह्मणजे, जर व अविभाज्य अंक आहे, आणि वनें अ

निःशेष भागिला जातो, तर  $a^{n-1}$  यास बने भागिले असतां १ बाकी राहिल.

मागे सांगितलेल्या (५) व्या आणि (७) व्या कृत्याप्रमाणे जर बने अ अविभाज्य असेल, तर १, अ,  $a^2$ ,  $a^3$ , इत्यादि यांस अनुक्रमाने बने भागिले असतां बाक्या निघतात, त्यांचे आरंभी १ येतो, आणि जर ब अविभाज्य अंक असेल, तर पूर्वी कोठे १ ही बाकी आली नसल्यास ती  $a^{n-1}$  यापासून येईल, आणि जरी ती बाकी पूर्वी आली असली अथवा नसली, तरी  $a^{n-1}$  यापासून अवश्य येईल. जाठिकाणापासून १ ही बाकी येती तेथून बाक्यांचा क्रम फिरतो, आणि बाक्यांचे क्रमाचे आरंभी १ हा अंक नेहमी येतो. यावरून जापहिल्या घातापासून १ ही बाकी येती तो घात जर  $a^n$  असला आणि ब अविभाज्य अंक असला, तर मची किंमत ब-१, अथवा त्याचे कांहीं गुणित होईल.

परंतु ब पक्षां म लहान असतां म, मअ,  $m a^2$ ,  $m a^3$ , इत्यादि श्रेणीचे पदांस ब ने भागिले असतां बाक्यांचे क्रम निघतील, आणि त्यांचे आरंभी म येईल. जर १, र, स, ट, इत्यादि असा बाक्यांचा पहिला क्रम असेल, तर म, मर, मस, मट, इत्यादि यांपासून जो बाक्यांचा क्रम निघेल, तो दुसरा क्रम होईल. आरंभा शिवाय पहिल्या क्रमांत  $a^{n-1}$  याचा पूर्वी जर १ येत नाही, तर ब-१ याचा खालचे सर्व अंक १, र, स, ट, इत्यादि क्रमांत येतात; आणि जर (४) कृत्याप्रमाणे बने म अविभाज्य असेल, तर ते सर्व अंक निराळ्या क्रमाने म, मर, इत्यादि बाक्यांत येतील. परंतु १, र, स, ट, इत्यादि हा क्रम जर पुरा नसेल, तर म, मर, मस, इत्यादि यांपासून बाक्यांचा निराळा क्रम उत्पन्न होईल.

अपूर्णांकास दशांश अपूर्णाकांचे रूप देण्याचे कृतीमध्ये हे सर्व शेवटील सिद्धांत सिद्ध होतात. जर बने म अविभाज्य असेल, अथवा  $\frac{m}{d}$  हा अपूर्णांक अति संक्षेप रूपाचा असेल, तर कृति करितानां म,  $m \times 10$ ,  $m \times 10^2$ , इत्यादि भागिले बने असे भागाकार येतील. जर १० चा एकादा घात जसे,  $10^n$  हा बने भागिला जाणार नाही, तर या कृतीचा शेवट कधीहि होणार नाही; आणि ब मध्ये २ आणि ५ हे अविभाज्य गुण्यगुणक नसतील, तर तो  $10^n$  घात बने भागिला जाणार नाही. सर्व पक्षांत भागाकार पुनः पुनः येतो, आणि हे येणे पहिल्या

अंकापासून होतें, किंवा कांहीं अंक सोडून होतें. जसें,  $\frac{1}{9}$  यापासून,  $१४२८५७१४२८५७$  इत्यादि येतात; परंतु  $\frac{1}{8}$  यापासून  $०७(१४२८५७)(१४२८५७)$ , इत्यादि येतात; आणि  $\frac{1}{27}$  यापासून  $०३(५७१४२८)(५७१४२८)$  इत्यादि येतात.

म  $\frac{1}{4}$  या अपूर्णाकांत जेव्हां व अविभाज्य अंक आहे, आणि व पक्षां म लहान आहे, तेव्हां भागाकार आरंभापासून पुनः पुनः येऊं लागतो; आणि जे अंक वारंवार येतात त्यांची संख्या व-१, अथवा त्याचा कांहीं मापक अशी संख्या असती. आणि ही गोष्ट अशी असावी असें वरचा कृत्यांपासून दिसतें.

पुढें चालायाचे पूर्वी एक भागाकारांतील जे अंक वारंवार येतात ते लिहून दाखवितों, आणि ते अंक काढून जा बाक्या रहातात त्याहि त्यांचे बरोबर लिहून दाखवितों.  $\frac{1}{99}$  हा अपूर्णाक घे तर,

$०१०५१५८१४८४२६३१५२१६९७४२१३११३७११६८४१२७१$   
हे अंक याप्रमाणें वाचावे;  $१०$  भागिले  $१७$ , भागाकार  $०$ , बाकी  $१०$ ;  $१०^२$  भागिले  $१७$ , भागाकार  $०५$ , बाकी  $१५$ ;  $१०^३$  भागिले  $१७$ , भागाकार  $०५८$ , बाकी  $१४$ ; आणि याप्रमाणें पुढें.  $१०^{१६}$  यांस  $१७$  नीं भागिलें असतां सिद्धांताप्रमाणें  $१$  बाकी राहती.

$०५८८$  इत्यादि यांस  $१७$  चे आंतील कोणत्याहि अंकानें गुणिलें, तर वरचे सारखाच क्रम येतो, परंतु त्याचा आरंभ निराळ्या तऱ्हेनें होतो. जसें, जर  $१३$  नीं गुणिलें, तर

$७६४७०५८८२३५२९४११$  असें होतें.

आणि वरचा भागाकारांत जा ठिकाणीं  $१३$  बाकी आहे, त्यापुढें जो भागाकार येतो, तो यांत आरंभीं आहे. जर  $७$  नीं गुणिलें, तर  $४११७$  इत्यादि येतील; याचें कारण उघड आहे;  $\frac{1}{99} \times १३$ , अथवा  $\frac{१३}{99}$  या अपूर्णाकास दशांश अपूर्णाकाचे रूप देतानां,  $१३०$  भाज्यकरून  $\frac{१}{99}$  याचें कृतीप्रमाणें कृति चालवितों, आणि यापुढें क्रम संपण्यास चार अंक असतात.

भागाकाराचे क्रमांतील पहिल्या अर्धांतील अंक आणि दुसऱ्या अर्धांतील अंक हे अनुक्रमाने परस्पर ९ चें पूरीकरण आहेत. आणि त्याचप्रमाणें त्या दोन अर्धांतील बाक्या परस्पर १७ चें पूरीकरण आहेत. जसें,  $०, १०, ५, १५, ८, १४, ८, १४$  इत्यादि आणि  $९, ७, ४, २, १, ३, १, ३$  इत्यादि यांत  $०+९=९$ ,  $५+४=९$ ,  $८+१=९$ , इत्यादि, आणि  $१०+७=१७$ ,  $१५+२=१७$ ,  $१४+३=१७$ , इत्यादि. याचा उपयोग पुढें दाखविल्याप्रमाणें आहे; अ<sup>१</sup>-१ यास कामांत आणायाचे पूर्वी जर बाकी १ रहात नाही, तर व अविभाज्य आहे असें कल्पून व-१ सम होईल; तो २क आहे असें ह्मण. तर, अ<sup>२क</sup>-१ यास वनिःशेष भागितो; परंतु अ<sup>क</sup>-१ आणि अ<sup>क</sup>+१ यांचे गुणाकाराबरोबर अ<sup>२क</sup>-१ आहे, ह्मणून त्यांतून एकपद वनें निःशेष भागिलें जावें. अ<sup>क</sup>-१ हें पद वनें निःशेष भागिलें जात नाही, कारण (व-१) या घाताचे पूर्वीचा अचा घात वनें निःशेष भागिला जाईल, आणि या उदाहरणांत तसें घडत नाही; यावरून अ<sup>क</sup>+१ हें पद वनें निःशेष भागिलें जातें, ह्मणून अ<sup>क</sup> यास वनें भागिलें असतां व-१ बाकी रहाती, आणि क पायरीवर कृतीचें अर्ध पुरें होतें, जसें, वरचा उदाहरणांत व=१७, अ=१० आणि कृतीचा आठवे पायरीवर १६ बाकी रहातात. पुढल्या पायरीवर  $१०(व-१)$ , अथवा  $९व+व-१०$  यापासून व-१० ही बाकी रहाती. परंतु पहिली बाकी १० आहे आणि  $१०+(व-१०)=व$ . जर हें पूरीकरण कोणत्याहि पायरीवर आढळलें, तर तें तसेंच पुढें चालेल हें दाखवितो; कोणतीएक बाकी र आहे, तिचे पुढली बाकी व-र आहे, आणि सर्वांची बेरीज व आहे असें मनांत आण. पहिल्या बाकीचे पुढले पायरीवर १०र यांस वनें भागितो, आणि दुसऱ्या बाकीचे पुढल्या पायरीवर  $१०व-१०र$  यांस वनें भागितो. आतां १०र आणि  $१०व-१०र$  यांची बेरीज वनें निःशेष भागिली जाती, आणि या दोन नव्या पायऱ्यांपासून अशा बाक्या निघाव्या कीं त्यांची बेरीज वचे बरोबर यावी, आणि याप्रमाणें पुढें; आणि भागाकारांची बेरीज ९ यावी, कां कीं १०र आणि  $१०व-१०र$  या बाक्यांचे बेरीजेपासून भागाकार १० येतो, आणि या पैकीं दोन बाक्यांपासून, १ उत्पन्न होतो.

जर  $\frac{१}{५९}$ , आणि  $\frac{१}{६९}$  हे अपूर्णांक घेतले, तर यांचे पुनः येणारे भागांत ५८ आणि ६० अंक आहेत असें दिसेल. त्यापैकीं पहिले अर्धे

अंक एथें लिहून दाखविले आहेत, आणि जें पूरिकरण वर सांगितलें त्याचा आधारानें बाकीचे अर्थे अंक शिकणारानें काढावे.

०१६९४९१५२५४२३७२८८१३५५९३२२०३३८, इत्यादि.

०१६३९३४४२६२२९५०८१९६७२१३११४७५४०, इत्यादि.

या दोन संख्या आहेत त्यांतून पहिलीस ५९ चे आंतील कोणत्याहि अंकांनें गुणिलें, आणि दुसरीस ६१ चे आंत कोणत्याहि अंकांनें गुणिलें, तर जे गुणाकार येतील तेवरचा संख्यांसारखेच येतील, परंतु एक शेवटाकडील कांहीं अंक दुसरे शेवटाकडे येतील.

परंतु व अविभाज्य असतां व-१ इतके अंक आल्याचे पूर्वी कदाचित् १ ही बाकी येईल; त्यापक्षांत वर दाखविल्या प्रमाणें व-१ यास भाजकाचे अंकांची संख्या निःशेष भागील. उदाहरण,  $\frac{1}{81}$  हा अपूर्णांक घे. याचे भागाकाराचे पुनः पुनः येणारे अंक वरप्रमाणें मांडिले असतां, ते ५ अंक आहेत असें दिसेल, आणि ४१-१ यांस ५ भागितात.

०१०२१०४१६३३७९१

आतां या भागाचे अंकांस १०, १८, १६, अथवा ३७ इत्यादि यांणीं गुणिलें असतां त्यांचीं स्थानें बदलतील. परंतु त्यांस ४१ चे आंतील दुसऱ्ये कोणत्ये अंकांनें गुणिलें, तर तो गुणाकार, दुसऱ्या अपूर्णांकाचा भाग होईल, आणि त्या अपूर्णांकाचा छेद ४१ होईल. पुढें जे क्रम दाखविले ते याप्रमाणें आहेत.

०१०२१०४१६३३७९१

०२०४३६८३२७३३८२

०३०७१३३७१२९७३

०४०९३१७२३५२५६४

१९२०१३९९२१५५

११९४२६६१४३१७४६

२२०६३४८१२३०९११

३२७६२४५३५८२२५१५

$\frac{म}{४१}$  या अपूर्णांकाचे दशांश काढायासाठीं बाकी अंकांमध्ये म पहा, आणि जा भागांत तो म आहे तो भाग घेऊन बाकीचे पुढल्ये अंकापासून आरंभ कर. जसें,  $\frac{३४}{४१}$  हे  $८२९२६८२९२६$ , इत्यादि आहेत,

आणि  $\frac{15}{8}$  हे  $३६५८५३६५८५$ , इत्यादि आहेत. या भागांतील दोन शेवटांपासून सारख्ये अंतरावरचे भाग परस्परांचे पुरीकरण आहेत, जसे,  $०२४३९$  आणि  $९७५६०$ ,  $०७३१७$  आणि  $९२६८२$ , इत्यादि, आणि जर  $०२४३९$  पहिला भाग  $४१$  चे आंतील कोणखे एक अंकाने गुणिला, तर तो अंक बाकीचे अंकांत पहा, ह्मणजे त्या बाकीचे पुढल्ये अंकांपासून त्या भागांत तो गुणाकार सांपडेल. जसे,  $०२४३९$  हे  $२३$  नीं गुणिले, तर  $५६०९७$  हे येतात,  $६$  नीं गुणिले तर  $१४६३४$  येतात.

पुढें जे अंक दिले आहेत, त्यांपेक्षां अधिक अंक न घेतां भागाकाराचें फळ शेवटपर्यंत कसें करितां येतें तें शिकणारानें शोधून काढावें. जा अपूर्णाकाचा भाग शोधून काढायाचा आहे, तो  $\frac{1}{10}$  आहे.

$८७)१००(०११४९४२५$

१३०

४३०

८२०

३७०

२२०

४६०

२५

$०११४९४२५ \times २५$

$२८७३५६२५ \times २५$

$७१८३९०६२५ \times २५$

$१७९५९७६५६२५ \times २५$

$४४८९९४१४०६२५$

$०११४९४२५२८७३५६२५$

$७१८३९०६२५$

$१७९५९७६५६२५$

$४४८९९४$

$०११४९४२५२८७३५६३२१८३९०८०४५९७७०११४९४$

## पुरवणी भाग दहावा.

### संयोगांविषयीं.

संयोगांविषयींचा कांहीं गोष्टी एथें सांगतो, कारण ग्रंथामध्ये जें त्यांचें व्याख्यान केलें आहे, त्यापेक्षा थोडक्यांत व्याख्यान एथें केलें आहे.

मनांत आण कीं चार पेढ्या आहेत, आणि त्यांत अनुक्रमानें ५, ७, ३, आणि ११ अशा चकत्या आहेत. तर पेढ्यांजवळ जाण्याचा क्रम मनांत न आणतां एक चकती प्रत्येक पेटींतून किती तऱ्हांनीं काढितां येईल? उत्तर,  $५ \times ७ \times ३ \times ११$  इतक्या तऱ्हांनीं काढितां येईल. कारण, पहिल्या पेटींतून एक चकती ५ निरनिराळ्ये तऱ्हांनीं काढितां येईल, आणि या प्रत्येक काढण्यास दुसऱ्ये पेटींतील ७ काढण्याचा तऱ्हांतून एक एक जोडावी, ह्मणजे तेणेंकरून  $५ \times ७$  इतक्या काढण्याचा तऱ्हा पहिल्या दोन पेढ्यांतून होतील. तिसऱ्ये पेटींतून काढण्याचा तऱ्हा ३ आहेत, ह्मणून पूर्वीचे तऱ्हांस यांतून एक एक जोडल्यानें  $५ \times ७ \times ३$  इतक्या काढण्याचा तऱ्हा पहिल्या तीन पेढ्यांपासून होतील; आणि याप्रमाणें पुढेहि. या पुढील प्रतिज्ञा सहज सिद्ध करितां येतील, आणि त्यांसारख्या दुसरे पक्षांविषयीं करितां येतील.

जर पेढ्यांकडेस जाण्याचे क्रमापासून कांहीं फेर पडतो, आणि जर निरनिराळ्ये पेढ्यांत अ, ब, क, ड, इत्यादि चकत्या आहेत, तर  $४ \times २ \times ३ \times १ \times अ \times ब \times क \times ड$ , इतक्या निरनिराळ्या तऱ्हा आहेत. जर पहिल्या पेटींतून दोन चकत्या, दुसरींतून तीन चकत्या, तिसरींतून एक चकती आणि चवथींतून तीन चकत्या अशा काढायाचा असतील आणि जर पेढ्यांचा क्रम मनांत आणिला नाही, तर चकत्या काढण्याचे तऱ्हांची संख्या.

$$अ \frac{अ-१}{२} \times ब \frac{ब-१}{२} \frac{ब-२}{३} \times क \times ड \frac{ड-१}{२} \frac{ड-२}{३} \text{ आहे.}$$

जर पेढ्यांकडे जाण्याचा क्रम मनांत आणिला, तर वरचे पद्धतीस  $४ \times ३ \times २ \times १$  याणीं गुणिलें पाहिजे. जर पेढ्यांतून काढण्याचे क्रमानें कांहीं फेर होतो, परंतु पेढ्यांचे क्रमानें फेर होत नाही, तर संख्या

$$अ(अ-१)ब(ब-१)(ब-२)कड(ड-१)(ड-२) \text{ आहे.}$$

न पेक्षांत निरनिराळ्या खुणा केलेल्या अ चकत्या ठेवण्याचे तऱ्हांची संख्या अचा न घात, अथवा अ न आहे, आणि या पक्षांत प्रत्येक पेटींत चकत्या ठेवण्याचा क्रम लक्षांत आणीत नाही. निरनिराळ्या तऱ्हेने खुणा केलेल्या चार चकत्या सात पेक्षांत ठेवायाचा आहेत. पहिली चक्की सातांतून कोणत्याही पेटींत ठेविली असतां सात तऱ्हा होतील; त्याचप्रमाणे दुसरी चक्की सात पेक्षांत ठेवितां येईल; आणि पहिल्या सात तऱ्हांतून एक, दुसऱ्या सातांतील एकीशीं मिळविली असतां, त्यापासून  $७ \times ७$  तऱ्हा होतील; तिसऱ्या चक्कीपासून या प्रत्येक तऱ्हेचा ७ निरनिराळ्या तऱ्हा होतात, आणि यामुळे सर्व मिळून  $७ \times ७ \times ७$  तऱ्हा होतात; आणि याप्रमाणे पुढेहि. परंतु जर चकत्यांवर कांहीं खुणा नसल्या, तर हें कृत्य अगदीं निराळे होईल.

कांहीं संख्या दिल्या असतां त्यांपासून दुसरी एक संख्या किती तऱ्हांनीं करितां येईल, आणि यांत प्रत्येक मोजण्याची तऱ्हा निरनिराळी आहे असें मनांत आण. जसें,  $१+३+१$  आणि  $१+१+३$  ह्या ५ ही संख्या करण्याचा निरनिराळ्या तऱ्हा आहेत. एक संख्या जितक्या तऱ्हांनीं होती, त्याचे दुप्पट तऱ्हांनीं पुढील संख्या होईल. उदाहरण, ८ ही संख्या घे. जितक्या वेगवेगळ्या तऱ्हांनीं ७ ही संख्या करितां येईल त्या तऱ्हा मांडिल्या, तर प्रत्येक तऱ्हेचा शेवटील भाग एकानें वाढविला, अथवा प्रत्येक तऱ्हेचे शेवटास १ जोडिला, तर ८ ही संख्या करितां येईल. जसें,  $१+३+२+१$  यापासून  $१+३+२+२$ , अथवा  $१+३+२+१+१$  असें होईल; आणि याप्रमाणे ८ ही संख्या करण्याचा सर्व तऱ्हा सांपडतील; कारण, ८ करण्याची कोणती एक तऱ्हा, जशी,  $अ+ब+क+ड$  ही ७ करण्याचा  $अ+ब+क+(ड-१)$  यापासून निघाली असावी. आतां  $(ड-१)$  हे ०— आहे, ह्मणजे ड हा एक आहे आणि तो—आहे अथवा  $ड-१$  ही बाकी रहाती ह्मणजे ती ड मध्ये १ उणा इतकी आहे. यावरून न संख्या करण्याचा  $२^{n-१}$  इतक्या तऱ्हा आहेत. कारण १ करण्याची एक तऱ्हा आहे, २ करण्याचा २ तऱ्हा आहेत; यावरून रितीप्रमाणे ३ करण्याचा  $२^२$  इतक्या तऱ्हा आहेत, ४ करण्याचा  $२^३$  इतक्या तऱ्हा आहेत; आणि याप्रमाणे पुढेहि.



$$\begin{array}{l}
 1 \left\{ \begin{array}{l} 1+1 \\ 1+2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+2+1 \\ 1+3 \end{array} \right. \\
 2 \left\{ \begin{array}{l} 2+1 \\ 3 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2+1+1 \\ 2+2 \\ 3+1 \\ 8 \end{array} \right.
 \end{array}$$

या कोष्टकापासून १, २, ३, आणि ४ या संख्या करण्याचा तऱ्हा दिसतात. यावरून असे दिसते कीं अ+ब करण्याचा तऱ्हा जेवढ्या आहेत, त्या अ करण्याचा तऱ्हांशीं ब चा तऱ्हा जोडून जेवढ्या होतात, तेवढ्यांचा दुप्पट आहेत; अ+ब+क करण्याचा तऱ्हा, अ करण्याचा तऱ्हांशीं बचा तऱ्हा आणि कचा तऱ्हा जोडून जेवढ्या होतात, त्यांचा चौपट आहेत, ही गोष्ट शिकणारानें शोधून काढावी. आणि याप्रमाणें पुढें. आणखी, अ + ब करितांना जा संख्यांची बेरीज घ्यावी लागती त्या तऱ्हांत किलेकांत अ स्पष्ट असतो आणि किलेकांत तो तसा असत नाहीं, आणि एका जातीचा जेवढ्या तऱ्हा तेवढ्याच दुसऱ्या जातीचा तऱ्हा असतात.

कांहीं विषमसंख्या दिल्या असतां, त्यांपासून दुसरी संख्या करण्याचे तऱ्हांची संख्या काढायाची आहे, प्रत्येक मोजण्याची तऱ्हा निरनिराळी आहे असे समजावें. याप्रमाणें न करण्याचा तऱ्हा जर अ आहेत आणि  $n+1$  करण्याचा तऱ्हा ब आहेत, तर  $n+2$  करण्याचा तऱ्हा अ+ब आहेत; कारण १० करण्याचे प्रत्येक तऱ्हेचे शेवटचा अंक २नी वाढविल्यानें, अथवा ११ करण्याचे प्रत्येक तऱ्हेचे शेवटीं १ जोडिल्यानें विषम अंकांपासून १२ करण्याची प्रत्येक तऱ्हा होती. जसें  $1+5+3+1$  यापासून १० होतात आणि या तऱ्हेपासून  $1+5+3+3$  ही १२ करण्याची तऱ्हा उत्पन्न होती. परंतु ११ करण्याचे  $1+9+1$  यातऱ्हेपासून, १२ करण्याची  $1+9+1+1$  ही तऱ्हा उत्पन्न होती. यावरून १० आणि ११ करण्याचे तऱ्हांचे बेरीजे बरोबर १२ करण्याचे तऱ्हांची संख्या आहे. आतां केवळ एक

तऱ्हेने १ होतो. आणि केवळ एक तऱ्हेने २ होतात; यावरून १+१, अथवा २ तऱ्हांनीं ३ होतील, १+२, अथवा ३ तऱ्हांनीं ४ होतील. १, १, २, ३, ५, ८, १३, २१, ३४, ५५, ८९ इत्यादि या श्रेणींत प्रत्येक पद, त्याचे पूर्वीचे दोन पदांचे बेरिजे बरोबर आहे, ही श्रेणी घेतली तर, यांतील न पद, विषम संख्यांपासून न संख्या करण्याचा तऱ्हा दाखविला. जसे, ५५ तऱ्हांनीं १० ही संख्या होईल, ८९ तऱ्हांनीं ११ ही संख्या होईल.

मनें भागिल्या जातील अशा संख्यांपासून मक ही संख्या  $2^{k-1}$  इतक्या तऱ्हांनीं होईल हें दाखिव, यांत क्रमाप्रमाणें मोजितात.

१ १ १ २ ३ ४ ६ ९ १३ १९ २८ इत्यादि  
० १ ० १ १ १ २ २ ३ ४ ५ इत्यादि

या दोन श्रेण्यांतून पहिल्ये श्रेणींत तिसरे पदापुढलें प्रत्येक नवें पद, हें शेवटील पद आणि शेवटील दोन पदे सोडून तिसरें पद यांचे बेरिजे-बरोबर आहे; दुसऱ्ये श्रेणींत तीन पदे सोडून शेवटील पदाचे पूर्वीचे एक पद आणि शेवटील पदाचे पूर्वीचे दुसरे पद, यांचे बेरिजे बरोबर प्रत्येक नवें पद आहे. यावरून जा संख्या ३ नीं भागिल्या असतां १ बाकी रहाती, अशा संख्यांनीं न संख्या करण्याचा तऱ्हा, पहिल्ये श्रेणीतील न पद दाखवितें, आणि जा संख्या ३ नीं भागिल्या असतां २ बाकी रहातात, अशा संख्यांनीं न संख्या करण्याचा तऱ्हा दुसरे श्रेणीतील न पद दाखवितें.

जर प्रत्येक क्रम निरनिराळी तऱ्हा आहे, तर कांहीं संख्या दिल्या असतां, त्यांपासून दुसरी संख्या किती तऱ्हांनीं होईल, हें सहज दाखवितां येईल. उदाहरण, ७ निरनिराळ्ये अंकांपासून वर सांगितल्याप्रमाणें १२ हे किती तऱ्हांनीं होतील. जर बारा एक मांडिले, तर त्यांतील प्रत्येक दोन एकामांमध्ये एक अंतर अर्शा ११ अंतरे आहेत. यावरून प्रत्येक शेवटाकडून साहा एकमांत एक अंतराची रेघ याप्रमाणें साहा अंतरांचा रेघा करून त्यांचे आंतील एकंचे अंक एकत्र करून सात अंकांपासून १२ होत नाहींत अशी एकहि तऱ्हा नाहीं. जसे, १+१+३+२+१+२+२ ही सात

अंकांपासून १२ करण्याची एक तऱ्हा आहे आणि ती या पुढीलप्रमाणे आहे,

$$१/१/१११/११/१/११/११$$

यांत ११ अंतरांतून पहिले, दुसरे, पांचवे, सातवे, आठवे, आणि दहावे अंतरांवर अंतरखुणा आहेत, यावरून सात अंकांपासून १२ हे किती तऱ्हांनीं करितां येतील, हें विचारणें ११ अंतरांमध्ये ६ अंतरखुणा किती तऱ्हांनीं करितां येतील, या विचारण्यासारखें आहे; अथवा ११ तून सहा सहांचे संयोग, अथवा निवडी किती होतील.

$$\frac{११ \times १० \times ९ \times ८ \times ७ \times ६}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६}, \text{ अथवा } ४६२ \text{ हें उत्तर.}$$

न वस्तूंतून म वस्तू जितक्या तऱ्हांनीं काढितां येतात ती संख्या म<sub>न</sub> याणें दाखविली, तर

$$न \times \frac{न-१}{२} \times \frac{न-२}{३} \dots \frac{न-म+१}{म} \text{ एथपावेतों, याचा संक्षेप म<sub>न</sub> आहे.}$$

तर न+१ करण्यासाठीं म+१ ह्या संख्या किती तऱ्हांनीं एकत्र केल्या पाहिजेत, त्यांची संख्या म<sub>न</sub> दाखवितो. यावरून १२ करण्यासाठीं ७ अंकांची योजना करण्याची संख्या ६,१ आहे, इतकें मात्र वर सिद्ध केलें. यावरून हें पुढील सिद्ध करून दाखविण्यास कांहीं अडचण नाही.

$$२न = १ + १न + २न + ३न \dots + नन$$

वरचा प्रश्नांत जे अंक कामांत घेतले आहेत त्यांत ० येत नाहीं. जसे, चार अंकांपासून ५ करण्याचा तऱ्हांत ३+१+१+० अशी तऱ्हा येत नाही. अंकांचे संख्येमध्ये ० जमेस धरून ७ अंकांपासून १२ किती तऱ्हांनीं करितां येतील हें आतां विचारितों. अंकामध्ये ० न घेतां ७ अंकांपासून १९ करण्याचा जितक्या तऱ्हा आहेत, त्यांपेक्षा अधिक किंवा उण्या तऱ्हा वरचे उदाहरणांत नाहीत. ० जमेस धरिलें असतां १२ करण्याचा जा तऱ्हा आहेत, त्यांतून प्रत्येक तऱ्हा घेऊन, त्यांतील प्रत्येक अंक १ ने वाढविला, तर अंकांत शून्याची गणना नाही, अशी १९ करण्याची तऱ्हा उत्पन्न होईल. त्याचप्रमाणें अंकांत शून्याची गणना नाही अशी १९ ची तऱ्हा घेऊन, त्यांतील प्रत्येक अंकांतून १ वजा कर, ह्याज ० अंकांत जमेस आहे अशी १२ करण्याची तऱ्हा निघेल. यावरून ०

जमेस असतां ७ अंकांपासून १२ करण्याचा तऱ्हांची संख्या  $6_{12}$  आहे, आणि ० जमेस असतां म संख्यांपासून न संख्या करण्याचे तऱ्हांची संख्या  $(म-न)_{न+म-१}$  आहे.

वर सांगितले तें पुढील प्रभाचे उलगडण्याप्रमाणें आहे; खुणावांचून न चकत्या म पेट्यांत किती तऱ्हांनीं टाकितां येतील? आणि हें पुढील सहज सिद्ध करून दाखवितां येईल; व पेट्यांतून एक किंवा अधिक पेढ्या रिकाम्या ठेवून, त्यांत खुणावांचून अशा क चकत्या ठेवण्याची संख्या  $(व-१)_{व+क-१}$  आहे. परंतु प्रत्येक पेट्यांत एक तरी चकती असावी, असें असल्यास  $(व-१)_{क-१}$  ही तऱ्हांची संख्या आहे; प्रत्येक पेट्यांत दोन चकत्या असाव्या असें असल्यास  $(व-१)_{क-व-१}$ ; प्रत्येक पेट्यांत तीन चकत्या असाव्या असें असल्यास  $(व-१)_{क-२व-१}$ ; आणि याप्रमाणें पुढें.

अंकांमध्ये ० जमेस असतां म समसंख्यांपासून न-म करण्याचे तऱ्हांचे संख्येचे बरोबर, म विषम अंकांपासून न करण्याचे तऱ्हांची संख्या आहे; ह्मणजे ० जमेस असतां म सम किंवा विषम अंकांपासून  $\frac{१}{२}(न-म)$  करण्याचे तऱ्हांची संख्या वर सांगितल्याबरोबर आहे. यावरून  $\frac{१}{२}(न-म)+म-१$ , अथवा  $\frac{१}{२}(न+म)-१$  इतक्या वस्तूंतून म-१ वस्तूंचे संयोगांचे संख्येबरोबर, म विषम संख्यां पासून न करण्याचे तऱ्हांची संख्या आहे. जर म आणि न हे दोन्हीं सम, किंवा दोन्हीं विषम नसतील, तर कृत्य अशक्य होईल.

न संख्यांतून म संख्या काढण्याचे तऱ्हांची संख्या म<sub>न</sub> हें सरळ पद दाखवितें, त्याचा योगानें संयोगांचे संख्यांमध्ये उपयोगी आणि चमत्कारिक संबंध आहेत, त्यांतून काहीं सहज दाखवितां येतील. मनांत आण कीं १२ तून ५ काढावयाचे आहेत; त्या १२ वस्तूंवर अ,ब,क,ड, इत्यादि खुणा मांड आणि त्यांतून एक वस्तू अ एकीकडे ठेव. १२ तून ५ काढण्याचा प्रत्येक समुदायांत अ येतो किंवा येत नाहीं. अ येत नाहीं अशे समुदायांची संख्या  $५_{११}$  आहे; आणि जात अ येतो अशा समुदायांची संख्या  $४_{११}$  अशी असावी, कारण अ खेरीज करून बाकीचे सर्व वस्तूंतून ४ काढण्याचे तऱ्हांची संख्या  $४_{११}$  आहे. यावरून  $५_{१२}$  हे  $५_{११}+४_{११}$  असावे, आणि याप्रमाणें प्रत्येक पक्षांत सिद्ध करून दाखवितां येईल,

$$m_n = m_{n-1} + (m-1)_{n-1}$$

$0_n$  आणि  $n_n$  हे दोन्ही १ याचे बरोबर आहेत; कारण कांहीं  $m$  घेण्याची तऱ्हा एकच आहे, आणि सर्व घेण्याची तऱ्हा एकच आहे. पुनः  $m_n$  आणि  $(n-m)_n$  हीं दोन्ही सारखीच आहेत. आणि जर नपेक्षां  $m$  मोठा आहे, तर  $m_n = 0$ ; कारण तसें करण्याची एकहि तऱ्हा नाही. पुढीलप्रमाणें लिहिलें असतां वर सांगितले परिणामांतून एकादा परिणाम सरळ रूपाचा होईल, जसें,

$$2^n = 0_n + 1_n + 2_n + \dots + n_n$$

$n$  वस्तूंतून  $m$ चे संयोगांची संख्या  $m_n$  आहे, आणि जा कोष्टकांतील  $n$  व्ये ओळीची  $m+1$  वी संख्या  $m_n$  आहे, त्या कोष्टकाचीं चिन्हे मांडिलीं असतां तो कोष्टक करण्याचा नियम पुढीलप्रमाणें आहे, असें वर सिद्ध झालें हें दिसेल; प्रत्येक अंकाचे वरचा अंक आणि त्यावरचे अंकाचे मागला अंक, यांचे बेरिजेबरोबर तो पहिला अंक आहे. आतां

	०	१	२	३	इत्या०	
१	० <sub>१</sub>	१ <sub>१</sub>	२ <sub>१</sub>	३ <sub>१</sub>	इ०	१, १, ०, ०, ०, इत्यादि ही पहिली आडवी ओळ आहे १, १, १, इत्यादि ही पहिली उभी ओळ आहे, यावरून कोष्टक या पुढीलप्रमाणें आहे आणि तो हवा तितका पुढें वाढवितां येईल;
२	० <sub>२</sub>	१ <sub>२</sub>	२ <sub>२</sub>	३ <sub>२</sub>	इ०	
३	० <sub>३</sub>	१ <sub>३</sub>	२ <sub>३</sub>	३ <sub>३</sub>	इ०	
इत्यादि	इ०	इ०	इ०	इ०		

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
१	१	१	०	०	०	०	०	०	०	०	०
२	१	२	१	०	०	०	०	०	०	०	०
३	१	३	३	१	०	०	०	०	०	०	०
४	१	४	६	४	१	०	०	०	०	०	०
५	१	५	१०	१०	५	१	०	०	०	०	०
६	१	६	१५	२०	१५	६	१	०	०	०	०
७	१	७	२१	३५	३५	२१	७	१	०	०	०
८	१	८	२८	५६	७०	५६	२८	८	१	०	०
९	१	९	३६	८४	१२६	१२६	८४	३६	९	१	०
१०	१	१०	४५	१२०	२१०	२५२	२१०	१२०	४५	१०	१

जसे, ९ व्ये आडव्ये ओळीत जा ओळीचे डोक्यावर ४ आहेत, त्या ओळीत १२६ हा अंक दिसतो, आणि तो  $९ \times ८ \times ७ \times ६ \div (१ \times २ \times ३ \times ४)$ , अथवा ९ वस्तूंतून ४ वस्तू काढण्याचे तऱ्हाचे संख्येबरोबर आहे, आणि ही गोष्ट ४ चे खाली ९, अथवा ४, अशांनी दाखवितात.

जर प्रत्येक आडव्ये ओळीची बेरीज घेतली, तर  $१+१$  अथवा २,  $१+२+१$ , अथवा  $२^२$ , पुढली ओळ  $१+३+३+१$  अथवा  $२^३$  इत्यादि, यापासून वर सांगितलेला सिद्धांत सिद्ध होतो; आणि कोष्टक करण्याचे नियमावरून उभ्या ओळी याप्रमाणें केल्या आहेत;

$$\begin{array}{r} ११ \\ ११ \\ \hline १२१ \end{array} \quad \begin{array}{r} १२१ \\ १२१ \\ \hline १३३१ \end{array} \quad \begin{array}{r} १३३१ \\ १३३१ \\ \hline १४६४१ \end{array} \text{ इत्यादि.}$$

यावरून प्रत्येक आडव्ये ओळीची बेरीज तिचे पूर्वीचे ओळीचे बेरीजेचे दुप्पट आहे. परंतु या करण्याचे कृतीचें फळ पुढें नेतां येईल.  $१+क्ष$  याचे घात बीजरूप गुणाकारानें केले, तर कृतीमध्ये क्षचेघातांचे अंकरूप गुणक करण्यांत, वरचे सारखीच वांकडी बेरीज करावी लागेल.

$$\begin{array}{r} १+क्ष \\ १+क्ष \\ \hline १+क्ष \\ क्ष+क्ष^२ \\ \hline १+२क्ष+क्ष^२ \end{array} \quad \begin{array}{r} १+२क्ष+क्ष^२ \\ १+क्ष \\ \hline १+२क्ष+क्ष^२ \\ क्ष+२क्ष^२+क्ष^३ \\ \hline १+३क्ष+३क्ष^२+क्ष^३ \end{array}$$

यांत  $१+क्ष$  याचा दुसरा आणि तिसरा घात आहे; आणि कोष्टकावरून चवथा घात सहज सांगतां येतो, आणि तो  $१+४क्ष+६क्ष^२+४क्ष^३+क्ष^४$  आहे; याप्रमाणें पुढें. यावरून,

$$(१+क्ष)^n = ०_n + १_n क्ष + २_n क्ष^२ + ३_n क्ष^३ + \dots + n_n क्ष^n, \text{ असें हो-}$$

तें आणि यांत बहुतकरून  $०_n, १_n$  इत्यादि सर्व पदे लिहितात असें,

$$(१+क्ष)^n = १ + nक्ष + n\frac{n-१}{२} क्ष^२ + n\frac{n-१}{२} \frac{n-२}{३} क्ष^३ + \text{इत्यादि.}$$

बीजांत जास द्वियुक्कपद सिद्धांत ह्मणतात, त्याचा हा एक सरळ पक्ष आहे. जर  $१+क्ष$  याचे ठिकाणीं  $क्ष+अ$  असें घेतलें, तर

$$(क्ष+अ)^n = क्ष^n + १_n अक्ष^{n-१} + २_n अ^२ क्ष^{n-२} + ३_n अ^३ क्ष^{n-३} + \dots + n_n अ^n$$

असें होईल. मागे सांगितलेला कोष्टक दुसऱ्ये रूपानें करितां येईल. एका आडव्या ओळींत पहिल्याने १ आणि त्याचापुढें काहीं शून्यें मांडून, नंतर दुसऱ्ये ओळीचा आरंभी पहिल्या ओळीचा पहिला अंक मांड, नंतर त्याशीं पहिल्या ओळीचा दुसरा अंक मेळीव ह्मणजे दुसऱ्ये ओळीचा दुसरा अंक होईल, याप्रमाणें शेवटील एक एक अंक सोडून सर्व ओळी पुन्या कर, ह्मणजे या पुढीलप्रमाणें होईल.

१	०	०	०	०	०	०
१	१	१	१	१	१	१
१	२	३	४	५	६	
१	३	६	१०	१५		
१	४	१०	२०			
१	५	१५				
१	६					
१						

या कोष्टकाचे तिर्कस ओळींत १ १, १ २ १, १ ३ ३ १, इत्यादि अंक आहेत, आणि मूळचे कोष्टकाप्रमाणेंच आहेत, आणि ते तशाच मिळवणीने उत्पन्न झाले आहेत. वरचा कोष्टक उत्पन्न करण्यासाठीं जा मिळवण्या कराव्या लागतात, त्या करण्याचे पूर्वीं जर अनें गुणिलें असतें, तर  $१+अ$  याचा घाताचे निरनिराळे अवयव सांपडले असते, असें,

१	०	०	०	०
१	अ	अ <sup>२</sup>	अ <sup>३</sup>	अ <sup>४</sup>
१	२अ	३अ <sup>२</sup>	४अ <sup>३</sup>	
१	३अ	६अ <sup>२</sup>		
१	४अ			
१				

या कोष्टकाचे त्रिकोण ओळींत १+अ, १+२अ+अ<sup>२</sup>, १+३अ+३अ<sup>२</sup>+अ<sup>३</sup> इत्यादि, १+अ चे निरनिराळे घात आहेत. जर १, ०, ०, इत्यादि हे घेऊन आरंभ करण्याबद्दल प, ०, ०, इत्यादि घेतले, तर प्रत्येक उभ्ये ओळीचे शेवटीं प, प×४अ, प×६अ<sup>२</sup>, इत्यादि आले असते; आणि प्रत्येक ओळीचे डोक्यावर क्ष<sup>४</sup>, क्ष<sup>३</sup>, क्ष<sup>२</sup>, क्ष, १, हे मांडिले असते, तर प्रत्येक उभ्ये ओळीचे दोन शेवटांवरील पदे गुणून त्या सर्व गुणाकारांची बेरीज घेतल्यानें प(क्ष+अ)<sup>४</sup> यास विस्ताररूप देण्याचे अवयव सांपडले असते.

प(क्ष+अ)<sup>३</sup>+क(क्ष+अ)<sup>२</sup>+र(क्ष+अ)+स, याचें विस्ताररूप वर सांगितले रितीप्रमाणें करितों.

क्ष <sup>३</sup>	क्ष <sup>२</sup>	क्ष	१	क्ष <sup>२</sup>	क्ष	१	क्ष	१	१
प	०	०	०	क	०	०	र	०	स
प	पअ	पअ <sup>२</sup>	पअ <sup>३</sup>	क	कअ	कअ <sup>२</sup>	र	रअ	
प	२पअ	३पअ <sup>२</sup>		क	२कअ		र		
प	३पअ			क					
प									

$$\begin{aligned} & \text{पक्ष}^3 + ३\text{पअक्ष}^2 + ३\text{पअ}^2\text{क्ष} + \text{पअ}^3 + \text{कक्ष}^2 + २\text{कअक्ष} + \text{कअ}^2 + \text{रक्ष} + \text{रअ} \\ & + \text{स} = \text{पक्ष}^3 + (३\text{पअ} + \text{क})\text{क्ष}^2 + (३\text{पअ}^2 + २\text{कअ} + \text{र})\text{क्ष} + \text{पअ}^3 + \text{कअ}^2 + \\ & \text{रअ} + \text{स} \end{aligned}$$

आतां पहिल्या कृतींत क, र, आणि स यांस क्षचा योग्यघाताचे ठिकाणीं मांडिले असते, तर ही सर्व कृति एकदांच झाली असती जसें,



क्ष <sup>३</sup>	क्ष <sup>२</sup>	क्ष	१
प	क	र	स
प	पअ+क	पअ <sup>२</sup> +कअ+र	पअ <sup>३</sup> +कअ <sup>२</sup> +रअ+स
प	२पअ+क	३पअ <sup>२</sup> +२कअ+र	
प	३पअ+क		
प			

पुणवणीचा ११ व्या भागांत जी कृति सांगितली ती हीच आहे, परंतु यांत शेवटील अक्षराचें चिन्ह बदलावें लागत नाहीं, आणि शेवटील ओळींत मिळवणीचा बदल वजावाकी करावी लागती, इतका मात्र यांत फेर आहे. अनेक बीजरूप पद्धतीमध्ये क्षचा जागी क्ष+अ मांडण्याची ही एक सोईची कृति आहे. उदाहरण, २क्ष<sup>५</sup>+क्ष<sup>४</sup>+३क्ष<sup>३</sup>+७क्ष+९ यांत क्षचा जागी क्ष+५ मांडिले असतां रूप कसे होईल ? ही पद्धती पूर्ण केली असतां या पुढीलप्रमाणें आहे,

$$\begin{array}{r}
 २क्ष^५ + १क्ष^४ + ०क्ष^३ + ३क्ष^२ + ७क्ष + ९ \\
 \begin{array}{cccccc}
 १ & ० & ३ & ७ & ९ \\
 २ & ११ & ५५ & २७८ & १३९७ & ६९९४ \\
 २ & २१ & १६० & १०७८ & ६७८७ \\
 २ & ३१ & ३१५ & २६५३ \\
 २ & ४१ & ५२० \\
 २ & ५१
 \end{array}
 \end{array}$$

उत्तर, २क्ष<sup>५</sup>+५१क्ष<sup>४</sup>+५२०क्ष<sup>३</sup>+२६५३क्ष<sup>२</sup>+६७८७क्ष+६९९४.

## पुरवणी भाग अकरावा.

समीकरणे उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति.

गणनेचे अभ्यासासाठी ही रीति फार उपयोगी पडती, ह्मणून ती या अभ्यासांत सांगितली आहे. यांत जीं उदाहरणे सांगितली आहेत, तीं उलगडण्यासाठी बीजगणिताचे चिन्हांचा थोडासा उपयोग पडेल, आणि या ग्रंथांत बीजगणिताविषयीं जें सांगितलें आहे, त्याची मात्र माहिती असली ह्मणजे हीं उदाहरणे समजतील.

$$२क्ष^४ + क्ष^२ - ३क्ष = ४१६७९३,$$

अथवा लिहिण्याचे चाली प्रमाणें

$$२क्ष^४ + क्ष^२ - ३क्ष - ४१६७९३ = ०,$$

असें समीकरण उलगडण्याचें असेल, तर पहिल्यानें अदमासानें मूळाचा पहिला अंक शोधून काढावा, इतकेंच केवळ नाहीं, परंतु त्या अंकाची जातहि शोधून काढावी. उदाहरण, जर तो पहिला अंक २ असला, तर तो २, अथवा २०, अथवा २०० इत्यादि, अथवा २ अथवा ०२ अथवा ००२ इत्यादि यांतून कोणखे जातीचा आहे हें जाणिलें पाहिजे. हेंहि अदमासानें कळेल; आणि अदमास करण्याचा सुलभ मार्ग या पुढीलप्रमाणें आहे; दिलेली पद्धती तिचे पूर्णरूपानें मांड. वरचे पक्षांत पद्धतीचें रूप पूर्ण नाहीं, आणि तिचें पूर्ण रूप हें पुढील आहे.

$$२क्ष^४ + ०क्ष^३ + १क्ष^२ - ३क्ष - ४१६७९३.$$

जेव्हां क्ष कांहीं संख्या आहे, ह्मणजे जसें, ३००० आहे, तेव्हां या पद्धतीची किंमत काढण्यासाठी, पहिल्यानें पहिला गुणक (२) घेऊन त्यास ३००० यांणी गुणावें, नंतर दुसरा गुणक (०) घेऊन त्यांत मिळवावा, आणि त्या उत्तरास ३००० यांणी गुणावें, आणि त्यांत दुसरा गुणक (१) मिळवावा, याप्रमाणें पुढें करीत जावें. जसें,

$$२ \times ३००० + ० = ६०००; ६००० \times ३००० + १ = १८०००००१$$

$$१८०००००१ \times ३००० - ३ = ५४०००००२९९७$$

$$५४०००००२९९७ \times ३००० - ४१६७९३ =$$

$$१६२०००००८५७४२०७$$

आतां क्ष=३० अशी कल्पना करून त्याची किंमत काढ. तर या पुढील प्रमाणे वेगळालीं पदे निघतील, ह्मणजे, ६०, अथवा (२×३०+०), १८०१, ५४०२७, आणि शेवटीं,

$$१६२७८१०-४१६७९३,$$

अथवा क्ष=३० केल्याने पहिलीं पदे ४१६७९३ यापेक्षां अधिक आहेत. आतां क्ष=२० असे घेऊन पाहिलें असतां, याप्रमाणें होईल, ह्मणजे ४०, ८०१, १६०१७, आणि शेवटीं,

$$३२०३४०-४१६७९३,$$

अथवा क्ष=२० केल्याने पहिलीं पदे ४१६७९३ यापेक्षां कमी आहेत. आतां २क्ष<sup>४</sup>+क्ष<sup>२</sup>-३क्ष यांस ४१६७९३ यांचे बरोबर असायासाठीं, क्षची किंमत २० आणि ३० यांचेमध्यें असावी. ह्मणून कृतीचे आरंभ ही गोष्ट सिद्ध केली पाहिजे.

इतकें जाणल्यानंतर, +२,०,+१,-३, आणि -४१६७९३ हे गुणक त्यांचे बीजगणित चिन्हांसहित मांडावे, परंतु शेवटल्याचें चिन्ह बदलून मांडावें. जेव्हां शेवटील चिन्ह-आहे, तेव्हां वर सांगितल्या-प्रमाणें करायास सोईस पडतें. परंतु शेवटील चिन्ह+असलें, तर त्याचे पूर्वीचे गुणकांचीं चिन्हे बदलून तें शेवटील चिन्ह तसेंच ठेविल्यानें सोईस पडतें. जसें, क्ष<sup>३</sup>-१२क्ष+१=०, हें समीकरण उलगडायास याप्रमाणें मांडितात.

$$-१ \quad ० \quad +१२ \quad १$$

परंतु पूर्वीचे उदाहरणांत याप्रमाणें मांडिलें पाहिजे,

$$+२ \quad ० \quad +१ \quad -३ \quad ४१६७९३,$$

## समीकरणें उलगडायाची होर्नर साहेबाची रीति. २६९

याप्रमाणें केल्यानंतर वर उरविलेला मूळाचा मोठा अंक घे, तो या पक्षांत २ दशक, किंवा २० आहे, असें आरंभीचे कृतीपासून कळलें. वरचे ओळींतील डावेकडील पहिलें पद २० नीं गुणून, त्यांत दुसरें पद मिळवून, ती बेरीज दुसऱ्ये पदाखालीं मांड; नंतर अशी आलेली रकम २० नीं गुणून त्या गुणाकारांत तिसरें पद मिळवून, ती बेरीज तिसऱ्ये पदाखालीं मांड; आणि याप्रमाणें पुढें कर. परंतु शेवटील पदाशीं आल्यावर, पूर्वीचे पदास २० नीं गुणून जो गुणाकार होतो, तो शेवटील पदांतून वजा करावा, अथवा त्या गुणाकाराचें चिन्ह बदल करून, त्यास शेवटील पदाशीं जोडून मांडावें. असें केल्यानंतर शेवटील पद किंवा वजाबाकीचें पद सोडून, बाकी ओळीचे अंकांशीं कृति कर; नंतर शेवटील दोन ओळी वांचून बाकीचे ओळींशीं कृति कर, आणि याप्रमाणें ओळींची स्थिती खालीं दाखविल्याप्रमाणें होईपर्यंत कर;

अ	ब	क	ड	इ
	फ	ग	ह	ऐ
	के	ल	म	
	न	ओ		
	प			

हीं पदें काढण्याची रीति पुढीलप्रमाणें आहे;

$$\begin{aligned}
 फ &= २०अ + ब, & ग &= २०फ + क, & ह &= २०ग + ड, & ऐ &= इ - २०ह, \\
 के &= २०अ + फ, & ल &= २०के + ग, & म &= २०ल + ह, \\
 न &= २०अ + के, & ओ &= २०न + ल, \\
 प &= २०अ + न,
 \end{aligned}$$

ही कृति होर्नर साहेबांनीं काढल्यावरून तीस होर्नर साहेबांची कृति ह्मणतात. आतां ही कृति वरचे उदाहरणाचे अंकावर लाविली असतां याप्रमाणें होईल;

अ	व	क	ड	इ
२	०	१	-३	४१६७९३ (२०
	४०	८०१	१६०१७	९६४५३
	८०	२४०१	६४०३७	
	११०	४८०१		
	१६०			

यावरून पुढें कृति चालविण्यास ही पुढील अंकांची ओळ आहे,

२ १६० ४८०१ ६४०३७ ९६४५३

या ओळीचे अंकांपासून मूळाचा दुसरा, अथवा एकंचा अंक काढण्या-विषयीं तर्क करितां येईल.

शेवटचे उजवेकडील अंकास भाज्य असें ह्मण, त्याचा डावेकडील पदास भाजक ह्मण, बाकीचे डावेकडील सर्व पदांस अग्रसर ह्मण. भाज्यांत भाजक किती वेळा जातो हें पहा; यावरून जो भागाकार येईल तो, दुसरे अंकाचे कल्पनेकरितां घेतां येईल. जर होर्नरची कृति लावल्यावर, पूर्वीचे, अथवा एकंचे स्थळींचे अंकाचे कृतीनें तो भाजक वाढविलेला असून, जर तितके वेळा भाज्यांत जातो, तर हा कल्पिलेला अंक खरा आहे. उदाहरण, वरचे पक्षांत ९६४५३ यांत ६४०३७ हे एक वेळा जातात; तर १ हा अंक खरा आहे किंवा नाहीं हें तपासून पहा. हा अंक खरा आहे असें होर्नरचे कृतीपासून दिसतें, आणि कृतीची ही दुसरी पायरी पुढीलप्रमाणें आहे,

२	१६०	४८०१	६४०३७	९६४५३	(१
	१६२	४९६३	६९०००	२७४५३	
	१६४	५१२७	७४१२७		
	१६६	५२९३			
	१६८				

याप्रमाणें इच्छित्ये मूळाचा पूर्ण भाग काढल्यावर, त्याचा अपूर्ण भाग काढायासाठीं कृतीचें रूप सुलभ होतें.

समीकरणे उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति. २७१

सांगीतले समीकरण चवथ्या वर्णाचे आहे ह्यापून, भाज्य अंकांवर चार शून्ये मांड, भाजकावर तीन शून्ये, त्याचे डावेकडल्या जवळचा अग्रसरावर दोन शून्ये, त्याचे डावेकडल्यावर एक शून्य, आणि पहिले पद तसेच ठेवावे; नंतर पूर्वीप्रमाणे नवे भाज्य आणि भाजकापासून भागाकाराचा नवा अंक काढून, तो अंक घेऊन होर्नरचा कृतीप्रमाणे पुढे चालावे. पुनः जी पदे निघतात, त्यांवर सांगीतल्याप्रमाणे शून्ये जोडून त्यांशी पुनः कृति करून, भागाकाराचा पुढला अंक काढावा; आणि याप्रमाणे पुढेहि. अशा तऱ्हेने शून्ये लाविली असतां दशांश चिन्हाची कांहीं गरज पडत नाही, आणि त्यापासून भागाकारांतील वेगवेगळ्या अंकस्थळांचे किमतीचा विचार करावा लागत नाही. पूर्वी वर्गमूल काढण्याची संक्षेप रीति सांगितली त्याप्रमाणे यांत, जेथून संक्षेप करावा लागतो, त्याचे पूर्वीचीं झळिलेलीं स्थळे काढण्याची सर्व कृति पुढे दाखविली आहे. यांत दशांशाचे एक स्थळापर्यंत कृति केली आहे.

२	०	१	-३	४१६७९३ (२१२
	४०	८०१	१६०१७	९६४५३
	८०	२४०१	६४०३७	२७४५३००००
	१२०	४८०१	६९०००	४७३३९७७८
	१६०	४९६३	७४१२७०००	
	१६२	५१२७	७५७३००७४	
	१६४	५२९३००	७७३४८३७६	
	१६६			
	१६८०	५३४३५८		
	१६८६	५३९४३४		
	१६९२	५४४५२८		
	१६९८			
	१७०४			

यापासून संक्षेप करायास आरंभ केला, तर मूळाचे अंक सुमाराने किती अधिक येतील ते जाणलें असतां बरें. संक्षेप करतेसमयीं भाजकांत जितकीं अंकस्थळें आहेत, तितकीं स्थळें मूळांत येतील, कदाचित् एक किंवा दोन स्थळें कमीहि येतील, असा निश्चय करितां येतो. जसें, वरचे उदाहरणाचे शेवटील भाजकांत आठ अंकस्थळें आहेत, त्यापासून संक्षेप केल्यानें निदान सहा स्थळें तरी येतील. संक्षेपाचा आरंभ करायासाठीं, भाज्यास तसाच राहूं दे, भाजकाचे उजवेकडचा एक अंक काप, त्याचे पूर्वीचे पदाचे उजवेकडून दोन अंक काप, त्याचे पूर्वीचे पदाचे उजवेकडून तीन अंक काप, आणि याप्रमाणें पुढेहि. या तऱ्हेनें संक्षेपाचा आरंभ करतेसमयीं ही पुढील ओळ येईल,

१००२ १|७०४ ५४४५|२८ ७७२४८३७|६ ४७३३९७७८

यांतून पहिलें पद अगदीं निरूपयोगी आहे. जे डावेकडचे अंक रेघेने कापले नाहींत, ते मात्र घेऊन पूर्वीप्रमाणें कृति कर. कृति करतेसमयीं कापलेल्ये अंकांतून दुसऱ्ये अंकांचे हातचे घेऊन, कापलेला पहिला अंक कृति करण्यांत घ्यावा. यावरून या पुढीलप्रमाणें होईल;

१|७०४ ५४४५|२८ ७७३४८३७|६ ४७३३९७७८ (६  
 ५४५५|५ ७७६७५७०|६ ७३४३५४  
 ५४६५|७ ७८००३६४|८  
 ५४७५|९

दुसऱ्यानें संक्षेप करतेसमयीं, पहिलें पद १|७०४ हें, १००१७०४ असें होतें, आणि यामुळें ते अगदीं निरूपयोगी होतें. दुसरी पायरी निराळी मांडिली असतां याप्रमाणें होईल, परंतु ती या पक्षांत उपयोगी नाहीं.

५४|७५९ ७८००३६|४८ ७३४३५४ (०

समीकरणें उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति. २७३

एथें ७३४३५४ या भाज्यांत ७८००३६ हा भाजक जात नाही, ह्मणून मूळाचे अंकांत ० मांडून दुसरा संक्षेप करावा.

$$\begin{array}{r|rr}
 ५४७५९ & ७८००३६४८ & ७३४३५४ \quad (९ \\
 & ७८००८५ & ३२२७७ \\
 & ७८०१३४ & 
 \end{array}$$

पुढील संक्षेप करितानां पहिलें पद | ००५४७५९ असें होतें, यामुळें तें निरुपयोगी होतें, ह्मणून बाकीची कृति केवळ संक्षेप भागाकाराप-  
माणें करावी इतकें मात्र बाकी राहिलें.

$$\begin{array}{r}
 ७८०१|३४)३२२७७(४१३७ \\
 \underline{१०७२} \\
 २९२ \\
 \underline{५८} \\
 ३
 \end{array}$$

आणि २१३६०९४१३७ हें इच्छिलें मूल, अथवा क्षची किंमत आहे.

आतां एका समीकरणाची सर्व कृति पुढें करून दाखवितों, त्या स-  
मीकरणाचें एक मूल ३ आणि ४ यांचामध्यें आहे. तें समीकरण या-  
प्रमाणें आहे;

$$क्ष^३ - १०क्ष + १ = ०$$



१	०	-१०	-१ (३१११०३९०५२०७३०	
	३	-१	२०००	९९०७९६
	६	X १७००	२०९०००	
X	९०	१७९१	१९७६९०००	
	९१	X १८८३००	७४३३६९००००००	
	९२	१८९२३१	१७२३११७१०२७३०००	
X	९३०	X १९०१६३००	९९१२४७४४७६८१	
	९३१	१९०२५६३१	३९४६२८७५४२०	
	९३२	X १९०३४९६३००००	१३९१४९१५५९	
X	९३३०	१९०३५२४२९९०९	५८९९३१२३	
	९३३१	X १९०३५५२२९८७००	१८८६०४७	
	९३३२	१९०३५६०६९८०५	९१ १७२८३५	
X	९३३३००	X १९०३५६९०९७८५	६३ १५१५	
	९३३३०३	१९०३५६९१४४५२	२८ १८३	
	९३३३०६	१९०३५६९१९११	८८३ १२	
X	९३३३०९०	१९०३५६९१९३०	६३ १	
	९३३३०	९९१९०३५६९१९४९	३९	
	९३३३१	०८.....		
X	०९३३३१	१७		

जे अंक एकाखालीं एक वारंवार येतात ते मांडण्याची गरज नाही; जसे, १९०३५६ हे अंक वारंवार प्रत्येक ओळीत येतात, ह्यानून ते मांडण्याचें प्रयोजन नाही. परंतु ते सोडले असतां किती सुलभ पडेल, याविषयीं शिकणारानें स्वतां विचार करावा. याविषयीं वर सर्व कृति करून दाविली आहे.

हीं पुढील उदाहरणें अभ्यासाकरितां उपयोगी पडतील;



૧૯. કા+રકા+કા-૧૫૦૦= કા=૪.૬૬૮૪૦૯૦૧૪૫૫૪૧૯૮૩૨૫૩૭૪૨૯૯૧૨૦૧૭૦૫૮૯૯.

૨૦. કા+કા=કા+૫૦૦ કા=૮.૨૪૦૯૬૩૬૫૫૮૧૪૪૮૫૮૫૮૫૨૬૯૬૩.

૨૧. કા+રકા+કા-૧૦૦૦૦૦= કા=૨૦.૮૫૨૯૦૫૫૨૬૦૦૯.

૨૨. કા+૪કા-૨૦૦૦૦૦= કા=૪.૫૮૧૪૦૦૩૬૨.

૧૦કા+૩૩કા+૧૧કા-૧૦૦૦= કા=૪.૧૪૬૭૯૭૮૦૮૫૮૪૨૭૮૭૮૫.

કા+કા+કા+કા=૧૨૭૬૯૪ કા=૧૮.૬૪૪૮૨૩૭૩૦૯૫.

૧૦કા+૧૧કા+૧૨કા=૧૦૦૦૦૦ કા=૨૧.૧૬૫૫૯૯૫૫૫૦૮૦૫.

કા+કા=૧૩ કા=૨.૨૦૯૭૫૩૩૦૧૨૦૮૪૯.

કા+કા+૪કા-૧૬૦૦૦= કા=૧.૧૪૮૨૮૩૭૧૫૭.

કા+૨કા=૫ કા=૨.૦૯૪૫૫૧૪૮૧૫૪૨૩૨૬૫૯૧૪૮૨૩૮૬૫૪૦૫૭૯૩૦૬૧૦૫૬૨૮૨૪૨

કા+૮૦કા+૨૪કા+૬કા-૮૦૩૭૯૬૩૯= કા=૧૨૩.

કા+૨૪૨કા+૬૩૧૫કા+૨૫૭૭૦૯૬= કા=૧.૪૧૪૨૧૩૫૬૨૩૭૩૦૯૫૦૪૮૦૩.

૨કા+૩કા+૬કા-૮= કા=૧.૪૧૪૨૧૩૫૬૨૩૭૩૦૯૫૦૪૮૦૩.

કા+૧૯કા+૧૩૨કા+૩૦૨કા+૨૦૦= કા=૧.૦૨૮૦૪, અથવા ૪, અથવા ૬.૫૭૬૫૩, અથવા ૭.૩૯૫૪૩.

કા+૧૯કા+૧૩૨કા+૬કા=૨૧૫ કા=૨.૭૦૬૪૮૦૪૯૩૮૫૭૯૧.

૭કા+૧૧કા+૬કા+૫કા+૩કા=૧૧ કા=૭૭૦૭૬૮૮૧૯૬૨૨૬૫૮૫૨૨૩૭૯૨૯૬૫૦૫.

૭કા+૬કા+૫કા+૫કા+૩કા=૧૧ કા=૭૭૦૭૬૮૮૧૯૬૨૨૬૫૮૫૨૨૩૭૯૨૯૬૫૦૫.

૭કા+૬કા+૫કા+૬કા+૩કા=૭૯૨.

કા=૨.૦૫૨૦૪૨૧૭૬૮૭૯૬૦૫૩૬૫૨૧૪૦૪૩૪૦૧૨૮૧૨૦૧૯૭૩૪૬૦૨૭૫૫૯૯૫૫૪૧૭૨૪૨૧૪.

૨૧૮ ૭કા+૨૪૩૦કા+૯૪૫કા+૧૫૦કા+૮= કા=૧૧૧૧૧.૧૧૧, અથવા ૨૨૨૨, અં.૩૩૩૩૩, અં.૪૪૪૪.

## पुरवणी भाग बारावा.

### भूमितीला अंकगणित लावण्याचा रितीविषयीं.

शिकणारा भूमितीचें प्रसिद्ध शब्दांशीं माहीत झाला असतां, त्यास या पुढील रिती समजण्यास सुलभ पडेल. त्यांत जेव्हां कोणी एक रेघ दुसऱ्या रेघेनें गुणायाची असें येतें, तेव्हां एका रेघेंत जितके एक जातीचे एकं आहेत, जसें, फुट, इंच, इत्यादि, तितक्या वेळा दुसऱ्या रेघेंतील त्याच जातीचे एकं घेण्याचे आहेत असें समजावें. परंतु दुसरे अर्थानें पाहिलें असतां, एक परिमाण दुसऱ्या परिमाणानें गुणायाचें आहे असें ह्मणणें अयोग्य आहे. सारख्ये जातीचीं सर्व परिमाणें सारख्या जातीचा एकंमानीं दाखविलीं पाहिजेत. जसें, फुटी आणि फुटीचे दशांश, अथवा इंच आणि इंचाचे दशांश, यांणीं सर्व रेघा दाखवाव्या. आणि जा जातीचे एकंमानें लांबी दाखविलेली असती त्याच जातीचे चौरस एकंमानीं क्षेत्र दाखविलें जातें; आणि त्याच जातीचे एकंमानीं घन, अथवा भरीव दाखविलें जातें. हें समजल्यावर या पुढील रिती सर्व जातीचे एकंमांस लागू होतील.

**काटकोनचौकोनाचें क्षेत्रफळ करायाची रीति.** जा दोन बाजू एकत्र मिळतात, त्यांतील एक परस्पर गुण, अथवा जा दोन बाजू एकत्र मिळतात त्या परस्पर गुण; जो गुणाकार येईल तितके चौरस एकं क्षेत्रांत आहेत. जसें, जर ६ फुटी आणि ५ फुटी अशा दोन बाजू आहेत, तर क्षेत्र फळ  $६ \times ५$ , अथवा ३० चौरस फुटी आहे. त्याचप्रमाणें जा चौरसाची बाजू ६ फुटी आहे, त्याचें क्षेत्रफळ  $६ \times ६$ , अथवा ३६ चौरस फुटी आहे. (२३४).

**समांतर रेघ चौकोनाचें क्षेत्रफळ करायाची रीति.** एक बाजू आणि तिचे समोरचे बाजूचें लंबांतर हीं परस्पर गुण; तो गुणाकार क्षेत्रफळांतील चौरस एकंमा बरोबर होईल.

**त्रापीज्यायदाचें\* क्षेत्र फळ करायाची रीति.** जा दोन रेघा समांतर नसतात, त्यांतून एकीचे मध्यापासून दुसरीवर लंब करून, त्या लंबानें ती दुसरी रेघ गुणून; जो गुणाकार येईल तें उत्तर होईल.

\* ही चार बाजूंची आकृती आहे, त्यांतील समोरासमोरचा दोन बाजू समांतर असतात. आणि दुसऱ्या समांतर नाहीत.

त्रिकोणाचें क्षेत्रफल करायाची रीति. त्रिकोणाचे कोणतेहि बाजू-  
वर तिचे समोरचे कोनापासून लंब करून, त्याच बाजूनें तो लंब गुणून,  
त्या गुणाकाराचें अर्ध क्षेत्रफल होईल. अथवा, तीन बाजूंचे लांब्यांची  
बेरीज घेऊन तिचें अर्ध करावें, नंतर या अर्धातून तीन बाजूंचा लांब्या  
वेगळाल्या वजा कराव्या, नंतर या तीन बाक्या व अर्ध बेरीज ही पर-  
स्पर गुणून, गुणाकाराचें वर्गमूल काढावें. तें मूल त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रा-  
तील चौरस एकमांची संख्या होईल; याची दुप्पट करून ती कोणते-  
हि बाजूचे लांबीनें भागिली, तर भागाकार त्याच बाजूचे समोरचे को-  
नाचें लंबांतर होईल.

जें वर्तुळ त्रिकोणाचे तीनहि बाजूंस आंतून स्पर्श करितें, त्या-  
ची त्रिज्या काढायाची रीति. वर सांगितल्याप्रमाणें त्रिकोणाचें क्षेत्रफल  
काढून, त्यास त्रिकोणाचे सर्व बाजूंचे अर्ध बेरीजेनें भाग, जो भागा-  
कार येईल तें उत्तर.

काटकोनत्रिकोणाचा दोन बाजू दिल्या असतां, कर्णरेघ का-  
ढायाची रीति. दोन बाजूंचे वर्ग करून त्यांची बेरीज घ्यावी, आणि  
तिचें वर्ग मूल काढावें तें उत्तर होईल.

काटकोनत्रिकोणाचा कर्ण आणि एक बाजू दिली असतां, दुस-  
री बाजू काढायाची रीति. दिलेल्या दोन बाजूंचे बेरीजेस त्यांचे वजा-  
बाकीनें गुणून गुणाकाराचें वर्गमूल काढ.

वर्तुळाचे त्रिज्येपासून जवळ जवळ परिघ काढायाची रीति.  
दुप्पट त्रिज्या, अथवा व्यास यांस ३.१४१५९२७ यांणी गुण, गुणाकारांत  
इच्छेप्रमाणें दशांशस्थळें घे. जवळ येण्यासाठीं व्यासाला २२ नीं गुणून  
७ नीं भाग. दशांश सोडून बरोबर उत्तर येण्यासाठीं, व्यासाला ३५५  
नीं गुणून १३३ नीं भाग. (१३१) कलमांतील शेवटील उदाहरण  
पहा.

वर्तुळाची त्रिज्या आणि सेक्कोराचा कोन, हीं दिलीं असतां वर्तु-  
ळाचे सेक्कोराची लांबी काढायाची रीति. कोनाचे मापास विक्रळांचें\*

\*काटकोनाचे बरोबर ९० भाग केले असतात त्यास अंश झणतात, प्रत्येक अंश बरो-  
बर ६० भागांत विभागलेला असतो, त्यास कळा झणतात, एक कळेचे बरोबर ६० भाग  
केले असतात, त्यास विकळा झणतात. २° १५' ४०" याचा अर्थ, २अंश, १५कळा,  
आणि ४० कळा असें समजावें.

रूप देऊन, त्यास त्रिज्येने गुण आणि तो गुणाकार  $२०६२६५$  यांणीं भाग, जो भागाकार येईल तितके एकं त्याचे कौसाची लांबी होईल.

वर्तुळाची त्रिज्या दिली असतां त्याचे जवळ जवळ क्षेत्रफल करायाची रीति. त्रिज्येचा वर्ग  $३१४१५९२७$  यांणीं गुण.

वर्तुळाची त्रिज्या आणि सेकतोराचा कोन दिला असतां, सेक्तोराचे क्षेत्रफल करायाची रीति. कोनाचे मापासविकलांचें रूप देऊन, त्यास त्रिज्येचे वर्गानें गुण आणि तो गुणाकार  $२०६२६५ \times २$ , अथवा  $४१२५३०$  यांणीं भाग, जो भागाकार येईल तें क्षेत्रफल होईल.

काटकोन भर्गवाचे घनफल करावयाची रीति. जा तीन बाजू एकत्र मिलतात, त्या परस्पर गुण, तो गुणाकार त्याचे घन एकं होतलं. जर आकृती काटकोन नसली, तर तिचे कोणखेहि एक बाजूचें क्षेत्रफल करून, तें त्या बाजू पासून तिचे समोरचे बाजूचे लंबांतरानें गुणावें, तो गुणाकार त्या समांतर भर्गवाचे घन एकं होतलं.

शंकूचें घनफल करावयाची रीति. पायाचें क्षेत्रफल करून तें शंकूचें लंब उंचीने गुणावें, आणि तो गुणाकार  $३$  नीं भागावा.

पृष्ठ्याचें घनफल करावयाची रीति. पायाचे क्षेत्रफळास दोन तोंडांचे लंबांतरानें गुणावें.

गोलाचें पृष्ठफल करावयाची रीति. त्रिज्येचा वर्गाची चौपट  $३१४१५९२७$  यांणीं गुणावी.

गोलाचें घनफल करावयाची रीति. त्रिज्येचा घन करून त्यास  $३१४१५९२७ \times \frac{३}{४}$ , अथवा  $४१८८७९$  यांणीं गुणावें.

सरळ शंकूचें पृष्ठफल करावयाची रीति. पायाची परिमिती बाजूचे तिरकस उंचीने गुणून, त्या गुणाकाराचें अर्ध उत्तर होईल. अशा शंकूचें घनफल करायासाठीं, पायाचें क्षेत्रफल लंबउंचीने गुणून गुणाकाराचा एक तृतीयांश उत्तर होईल.

सरळ शिळिंदराचें पृष्ठफल करावयाची रीति. पायाचा परिघ उंचीने गुणावा, तो गुणाकार उत्तर होईल. त्याच घनफल करायासाठीं पायाचे क्षेत्रफळास उंचीने गुणावें.

जेव्हां काहीं पदार्थाचें घनफल माहीत असतें, आणि जर त्या पदार्थाचा एक घन इंच किंवा एक घन फुट याचें वजन माहित असल्यास, त्यावरून त्या सर्व पदार्थाचें वजनहि काढितां येईल. परंतु निरनिराळ्ये

पदार्थांचे घन एकमाचे वजनाचे कोष्टक करित नाही, परंतु ही निमि-  
राळी वजनं त्यांतील एकाद्या पदार्थाचे वजनाशीं जें प्रमाण ठेवितात,  
आप्रमाणाचे कोष्टक केले असतात. तो पदार्थ बहुतेकरून, शुद्धपाणी  
असें ठरविलें आहे, आणि पाण्याचे वजनाशीं दुसऱ्ये पदार्थाचे वजनाचे  
प्रमाणास स्थितिफिक्क्याविटि छणतात. जसें, सोन्याची स्थितिफिक्क्या-  
विटि १९३६२ आहे, अथवा शुद्धपाण्याचे एक घन फुटीचे वजनाचे  
१९३६२ पट, सोन्याचे एक घन फुटीचें वजन आहे. एक सोन्याचे  
गोळ्याची त्रिज्या ४ इंच आहे, आणि त्याचें वजन किती आहे हें जा-  
णायचें आहे. या गोळ्याचें घनफळ  $4 \times 4 \times 4 \times 1.9362$ , अथवा  
 $261.0132$  घन इंच आहे; आणि जापेक्षां (२१७) प्रमाणें एक घन  
इंच पाण्याचें वजन  $2.5284$  ग्रॅम आहे, यावरून सोन्याचे प्रत्येक  
घनइंचाचें वजन  $2.5284 \times 1.9362$ , अथवा  $4.8991$  ग्रॅम  
आहे; यावरून सोन्याचे  $261.0132$  घन इंचांचें वजन  $261.0132 \times$   
 $4.8991$  ग्रॅम, अथवा त्रायचे  $1279\frac{1}{2}$  पौंड जवळजवळ आहे.  
रसायण शास्त्राचे आणि यंत्र शास्त्राचे बहुतेक ग्रंथांत स्थितिफिक्क्या-  
विटिचे कोष्टक असतात.

पाण्याचे एक घन फुटींत त्रायचे  $101.418$  औंस, अथवा  $2.8348$   
पौंड आहेत, अवाज्युपार्सचे  $997.1369691$  औंस,  
अथवा  $12.3210606$  पौंड आहेत. साधारण कामाविषयीं एक  
घन फुट पाण्याचें वजन  $1000$  औंस धरलें तरी चालेल, जेणेकरून  
स्थितिफिक्क्याविटिचे कोष्टकाचें साधारण रूप होतें. जसें, जेव्हां एकाद्या  
पदार्थाची स्थितिफिक्क्याविटि  $8.1172$  आहे असें जेव्हां आढळतें, तेव्हां  
त्या पदार्थाचे एक घन फुटीचें वजन  $8.117$  औंस आहे असें समजावें.  
जापेक्षां खरें उत्तर येण्यासाठीं या आलेख्ये उत्तरांतून प्रत्येक हजार भा-  
गाबद्दल ३ भाग वजा करावे.

## शुद्धिपत्र.

पृष्ठ.	भोल.	अशुद्ध.	शुद्ध.	पृष्ठ.	भोल.	अशुद्ध.	शुद्ध.
७	२६	अंकाविषयीं	अंकाविषयीं	११०	२९	प्रमाणे	प्रमाणें
८	२०	अंकाची	अंकाची	१११	२५	७x२०+२०	७x(२०+२०)
११	७	अंकाचे	अंकाचे		२७	५x२०+२०	५x(२०+२०)
४७	२७	जागी	जागीं	१४७	७	व्युत्क्रम	व्युत्क्रम
६४	३	१८,२९,२०	१८,१९,२०		८	व्युत्क्रम	व्युत्क्रम
		७लाभारण	साधारण		१८	व्युत्क्रम	व्युत्क्रम
६९	८	६	६		२१	एनएटअ	एनएटअ
७०	२६	$\frac{६}{१०००}$	$\frac{९}{१०००}$	१५१	१	अंशानां	अंशानां
७२	१३	$\frac{१०२३०९००}{१००००}$	$\frac{१०२३०२०००}{१००००}$	१६८	२	माहति	माहित.
	१५	जाचें छेदस्थळीं	जाचें छेदस्थळीं	१७९	१४	दर ३८ पेनोस	दर १८ पेनोस
७९	१०	पहाण्याकरिनां	पहाण्याकरिनां	१९३	३	मनुष्ये	६ मनुष्ये
	११	(२१२)	(११२)	२२७	३	पेक्षा	पेक्षा
८९	९	०२=००८	०२+००८	२४०	२२	$\frac{७०}{११३०}$	$\frac{७०९}{११३०}$
९७	१२	००७८१२५	०००७८१२५	२४७	२९	ब	ब
१०६	३०	२६०१	२०६१	२४८	२९	बन-१	बब-१
१०७	१२	दशाशस्थळें	दशाशस्थळें	२७८	३१	कळा	विकळा
१०७	७१	भारंभी	भारंभां	२७९	१५	चें	चे
१०९	१६	गुणिलें	गुणिले	२७	त्याच	त्याचें	